

Supraleitung (SUP)

Fortgeschrittenen Praktikum, SS 2008

Philipp Buchegger, Tobias Müller, Alexander Seizinger, Michael Ziller
Betreuer: Matthias Kemmler

Tübingen, den 29. April 2008

1 Einführung

Im Jahr 1911 entdeckte Heike Onnes, dass Quecksilber bei einer Temperatur von 4,19 Kelvin seinen elektrischen Widerstand verlor. Diese Eigenschaft der sprunghaften Widerstandsveränderung bei einer charakteristischen Temperatur konnte mittlerweile bei zahlreichen Materialien beobachtet werden und ist als Supraleitung bekannt.

2 Theorie

2.1 Grundlagen

Betrachtet man die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands, so lässt sich materialabhängig qualitativ verschiedenes Verhalten beobachten: Im Fall eines idealen Leiters sinkt der elektrische Widerstand linear mit der Temperatur und erreicht bei 0 Kelvin den Nullpunkt (Bild 1, Kurve 1). Ein realer Leiter weist aufgrund von Inhomogenitäten und Verunreinigungen im Material auch am absoluten Nullpunkt einen Restwiderstand auf (Bild 1, Kurve 2). Ein Halbleiter hingegen zeigt bei einer charakteristischen, endlichen Temperatur einen starken Anstieg des Widerstands, der für weiter sinkende Temperatur divergiert. Im Fall des Supraleiters fällt der Widerstand bei einer kritischen Temperatur T_c abrupt auf Null ab. Typische Werte für T_c bei Tieftemperatursupraleitern sind etwa 4,15K (Hg) und 7,2K (Pb). Hochtemperatursupraleiter weisen hingegen Sprungtemperaturen im Bereich von 50 – 100K auf. Zur Konstruktion eines Messapparates für tiefe Temperaturen empfiehlt es sich einen Halbleiter zu verwenden, da dieser die beste Auflösung im Tieftemperaturbereich liefert.

2.2 Meißner-Effekt

Betrachtet man einen Supraleiter in einem äußeren Magnetfeld B_a unterhalb der kritischen Temperatur, so ist eine Verdrängung der magnetischen Feldlinien aus dem inneren beobachtbar. Lediglich in den Randbereichen findet



Abbildung 1: Links: 1 idealer Leiter, 2 realer Leiter, 3 Halbleiter; Rechts: Supraleiter Hg [BK04]

ein exponentiell abklingendes Eindringen des Feldes B statt. Dieses Phänomen wird als Meißner-Effekt bezeichnet. Unterhalb von T_c gilt in einem langen, dünnen Supraleiter:

$$B = B_a + \mu_0 M = 0 \quad (1)$$

Der Supraleiter ist unterhalb der kritischen Temperatur in der Lage induzierte Kreisströme permanent aufrechtzuerhalten, was zur Abschirmung des Feldes führt. Untersucht man im Vergleich einen idealen Leiter, so darf sich bei verschwindendem Widerstand ρ aufgrund des Ohmschen Gesetzes $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} = 0$ das Magnetfeld B nicht ändern:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (2)$$

Der Meißner-Effekt widerspricht diesem Verhalten. Ein idealer Leiter ist aufgrund der unendlich großen freien Weglänge der Elektronen zwar in der Lage, die induzierten, abschirmenden Kreisströme permanent aufrechtzuerhalten, jedoch kommt spielt die Reihenfolge des Abkühlens und Feld anlegens eine Rolle. Beim Supraleiter hingegen spielt diese Reihenfolge keine Rolle. Dies deutet daraufhin, dass es sich bei der Supraleitung um einen Phasenübergang in der Probe handelt.

Die Supraleitung kann außer durch die Erhöhung der Temperatur auch durch das anlegen eines hinreichend starken Magnetfeldes B_c , sowie die Überschreitung einer kritischen Stromstärke j_c zerstört werden (Bild 2). Die kritische



Abbildung 2: Magnetfeld in der Probe inneren in Abhängigkeit vom äußeren Feld [BCHR07]

Feldstärke, sowie die kritische Stromstärke, bei der die Supraleitung zusammenbricht, sind sowohl voneinander, als auch von der Temperatur abhängig. Dieser Umstand, sowie die reine Existenz der kritischen Größen ist nur auf dem Hintergrund der BCS-Theorie zu verstehen. Stromstärke, Magnetfeld und Temperatur wirken der Formation von Cooper-Paaren entgegen und sorgen bei ausreichender Stärke für ein Aufbrechen der Bindung zwischen den an Parren

beteiligten Elektronen (Bild 3). Die Untersuchung der kritischen Feldstärke verschiedener Supraleiter offenbart jedoch,



Abbildung 3: Temperaturabhängigkeit des kritischen Feldes [BK04]

dass nicht jedes Material einen abrupten Zusammenbruch der Supraleitung bei B_c aufweist (Typ I, Bild 4), sondern in einigen Fällen zwei kritische Feldstärken existieren. Im Fall von Typ II Supraleitern beginnt die Magnetisierung ab B_{c1} stetig zu sinken und geht bei einer zweiten kritischen Feldstärke B_{c2} auf Null zurück.



Abbildung 4: Magnetisierung in Abhängigkeit des äußeren Feldes für Typ I und Typ II Supraleiter [BK04]

2.3 London-Theorie

Die London-Theorie war der erste Versuch zur phänomenologischen Erklärung der Supraleitung. Um Unstetigkeiten der Felder am Rand des Supraleiters zu vermeiden, fordert die London-Theorie eine Proportionalität der Stromdichte \mathbf{j} zum Vektorpotential \mathbf{A} . Auf diese Weise wird eine physikalisch sinnvolle Lösung der Maxwellgleichung, mit der zusätzlichen Bedingung $R = 0$, möglich. Ausgangspunkt bildet die London-Gleichung:

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{A} \quad (3)$$

Hier bezeichnet λ_L die London-Eindringtiefe. Unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen gelangt man zu:

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}}{\lambda_L^2} \quad (4)$$

Diese Gleichung erklärt den Meißner-Effekt, da keine räumlich gleichförmige Lösung zulässig ist. Als Lösung ergibt sich im inneren des Supraleiters:

$$B(x) = B(0) \exp -\frac{x}{\lambda_L} \quad (5)$$

Mit $\lambda_L = \left(\frac{\epsilon_0 m c^2}{n q^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Das Magnetfeld dringt also lediglich exponentiell abfallend in die Probe ein. Typischerweise liegt λ_L zwischen $1,6$ und $10 \cdot 10^{-6}$ cm.

2.4 BCS-Theorie

Die BCS-Theorie gestattet es die Supraleitung auf einer mikroskopischen Ebene zu erklären. Die Theorie basiert auf der Annahme einer attraktiven Wechselwirkung der Elektronen im Festkörper, die durch den Austausch von Phononen (Gitterschwingungen) zustandekommt. Aufgrund dieser Wechselwirkung ist es für einige Elektronen unter bestimmten Bedingungen (z.B. bei $T = 0$) günstiger, sich zu einem Cooper-Paar zusammenzuschließen. Dabei handelt es sich um ein Quasiteilchen mit Spin 0, das sich aus Elektronen entgegengesetzten Spins und Impulses zusammensetzt. Das Teilchen verhält sich also wie ein Boson.

Die potentielle Energie, die die Elektronen gewinnen, wenn sie sich zu einem Cooper-Paar zusammenschließen, bezeichnet man als Gap-Parameter Δ . Dieser Parameter ist bei $T = 0$ am größten. Für Elektronen in Einteilchenzuständen nahe der Fermi-Kante, kann es also auch bei $T = 0$ energetisch günstiger sein, in einen Zustand höherer kinetischer Energie zu wechseln um mit einem anderen Elektron ein Cooper-Paar zu bilden (Bild 5). Die Gesamtenergie des Systems ist also geringer als die Fermi-Energie ϵ_F . Dieser Umstand führt bereits bei $T = 0$ zu einem ausschmieren



Abbildung 5: Energielücke im Supraleiter [BK04]

der Fermikante. In der BCS-Theorie wird der Grundzustand des Vielteilchensystems durch die Größen $u(\mathbf{k})$ und $v(\mathbf{k})$ charakterisiert. $|v(\mathbf{k})|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit für die Besetzung des Paares $(\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow)$ an, $|u(\mathbf{k})|^2$ entsprechend die Gegenwahrscheinlichkeit. Es gilt:

$$u(k)^2 + v(k)^2 = 1 \quad (6)$$

$$v(k)^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tilde{\epsilon}_k}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta^2}} \right) \quad (7)$$

$$\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k - \lambda - Gv(k)^2 \quad (8)$$

Mit der Einteilchenenergie bzw. der renormierten Einteilchenenergie ϵ_k bzw. $\tilde{\epsilon}_k$, G der Wechselwirkungsanteil des Zweiteilchen-Hamiltons und der Eindringtiefe λ . Bei höheren Temperaturen kann es zu Anregungen aus dem BCS-Grundzustand kommen. Dies entspricht dem aufbrechen von Cooper-Paaren.

2.5 Ginzburg-Landau-Theorie

Die Ginzburg-Landau-Theorie verfolgt ähnlich dem London-Ansatz eine phänomenologische Beschreibung des supraleitenden Zustands aus der Theorie der Phasenübergänge im Rahmen der Thermodynamik. Dazu wird ein Ordnungsparameter $\psi(\mathbf{r})$ eingeführt und die freie Energie des Systems in der Umgebung der Übergangstemperatur in dem Ordnungsparameter entwickelt:

$$F_s(\mathbf{r}) = F_n - \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + |(-i\hbar\nabla - qA/c)\psi|^2 - \int_0^{B_a} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B}_a \quad (9)$$

Hier bezeichnet F_n die Dichte der freien Energie im Normalzustand. Minimierung des Funktional durch Variation liefert die Ginzburg-Landau-Gleichung:

$$\left(\frac{1}{2}m(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}c)^2 - \alpha + \beta|\psi|^2 \right) \psi = 0 \quad (10)$$

Minimierung des Funktional bezüglich \mathbf{A} liefert einen eichinvarianten Ausdruck für die Stromdichte im supraleitenden Zustand. Aus dieser Gleichung lassen sich charakteristische Größen wie Eindringtiefe des Feldes λ sowie die Kohärenzlänge ξ ableiten. Die Kohärenzlänge ist ein Maß für den räumlichen Abstand der Elektronen eines Cooper-Paares, sowie für die Längenskala auf der sich der Ordnungsparameter signifikant ändert. Mittels dieser beiden Parameter ist es möglich, analytisch zwischen Supraleitern erster und zweiter Art zu unterscheiden. Bei einem Supraleiter erster Art bricht der supraleitende Zustand bei einer kritischen Feldstärke H_c abrupt zusammen. Für diese Art gilt $\kappa = \frac{\lambda}{\xi} < 1$. Supraleiter zweiter Art weisen hingegen zwei kritische Feldstärken auf. Bei der Feldstärke H_{c1} findet verschwindet die Magnetisierung nicht abrupt, sondern beginnt stetig zu sinken und erreicht bei H_{c2} den Nullpunkt (Bild 4). Im Bereich zwischen diesen beiden Feldstärken befindet sich der Supraleiter in einem Mischzustand, der sogenannten Shubnikov-Phase. Sie wird durch eine exakte Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichung beschrieben.

2.6 Flussquantisierung

In der Shubnikov-Phase dringt der magnetische Fluss streng lokalisiert in den Supraleiter ein und es kommt zur Ausbildung von Flussschläuchen, die jeweils ein Flussquant $\phi_0 = \frac{h}{2e}$ transportieren. Innerhalb der Flussschläuche sind die Cooper-Paare aufgebrochen und die Elektronen bilden Ringströme. Für das Magnetfeld eines Flusswirbels ergibt sich (mit der Besselfunktion j_0):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} j_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (11)$$

Längs eines Fluss Schlauchs folgt für Magnetfeld und Stromdichte: (Bild 6)



Abbildung 6: Stromdichte und Magnetfeld bei Längsschnitt durch einen Flußschlauch [BCHR07]

2.7 Flux-Flow-Widerstand

Fließt Strom durch den Supraleiter so wirkt eine Lorentzkraft senkrecht zum Strom und zum Magnetfeld. Dies führt zu einer Bewegung der Flussläuche senkrecht zu ihrer Längsachse. Betrachtet man einen festen Punkt im Supraleiter auf den sich ein Flusslauch zubewegt, so ist dieser Ort einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld ausgesetzt. Dieses Feld erzeugt wiederum ein elektrisches Feld, das ungebundene Elektronen beschleunigt. Die so gewonnene kinetische Energie kann an das Kristallgitter abgegeben werden und es entstehen Wärmeverluste. Da nur der Transportstrom Energie zur Verfügung stellen kann, weist der Supraleiter in der Shubnikov-Phase offensichtlich einen elektrischen Widerstand auf, der als Flux-Flow-Widerstand bezeichnet wird. Wird zunehmend Magnetfeld steigt die Zahl der Flussläuche an und es kommt zu periodischen Anordnungen. Auf diese Weise steigt auch der Gesamtwiderstand, was sich in einer steileren I-U-Kennlinie niederschlägt (Bild 7).



Abbildung 7: Strom-Spannungs-Kennlinie eines Typ II Supraleiters [BK04]

3 Auswertung

3.1 kritische Temperatur T_c und Energielücke Δ von Nb

Um die kritische Temperatur der Niob-Probe 2 zu messen, wurden in 3 Messdurchläufen die Probe jeweils von 4,3K bis ca. 10K erhitzt und anschließend wieder auf 4,3K abgekühlt. Dabei wurde in 0,3K Schritten der Widerstand gemessen. Trägt von die 3 Messreihen mit unterschiedlichen Messtrom I in ein Diagramm ein, so kann man daraus die kritische Temperatur T_c relativ leicht auslesen.

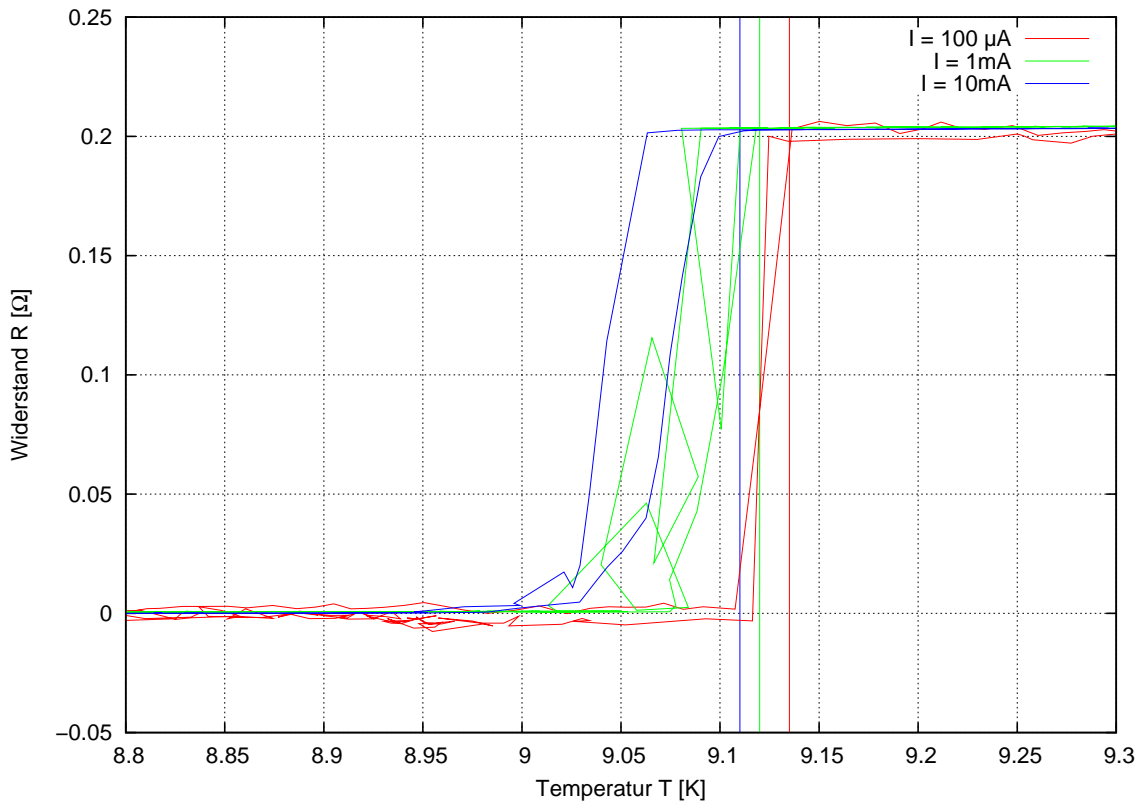


Abbildung 8: Widerstand der Nb-Probe in Abhängigkeit der Temperatur. Eingezeichnet sind die ermittelten Sprungtemperaturen T_c .

Wir erhalten aus unserem Diagramm die folgenden Werte, in dem wir die Temperatur an der Stelle ablesen, bei welcher der Supraleiter beim Erwärmen wieder den Restwiderstand hat. Die Hysterese sind der Kurve tritt beim Abkühlen der Probe auf, da hier noch Wärme im Metall gespeichert ist.

I [mA]	T_c [K]
0.1	9.135
1	9.12
10	9.11

Aus den Messwerten, erhält man den Mittelwert

$$T_c = (9.122 \pm 0.01)K$$

Daraus läßt sich die Energielücke Δ bestimmen, welche mit T_c in folgender Weise zusammenhängt:

$$2\Delta = 3,5k_B T_c$$

Somit erhalten wir:

$$\Delta = (1,38 \cdot 10^{-3} \pm 1,55 \cdot 10^{-6})\text{eV}$$

3.2 freie Weglänge l und Ginzburg-Landau-Paramter κ von Nb

Vergößert man den Bereich knapp überhalb von T_c aus Diagramm 8 so erhält man:

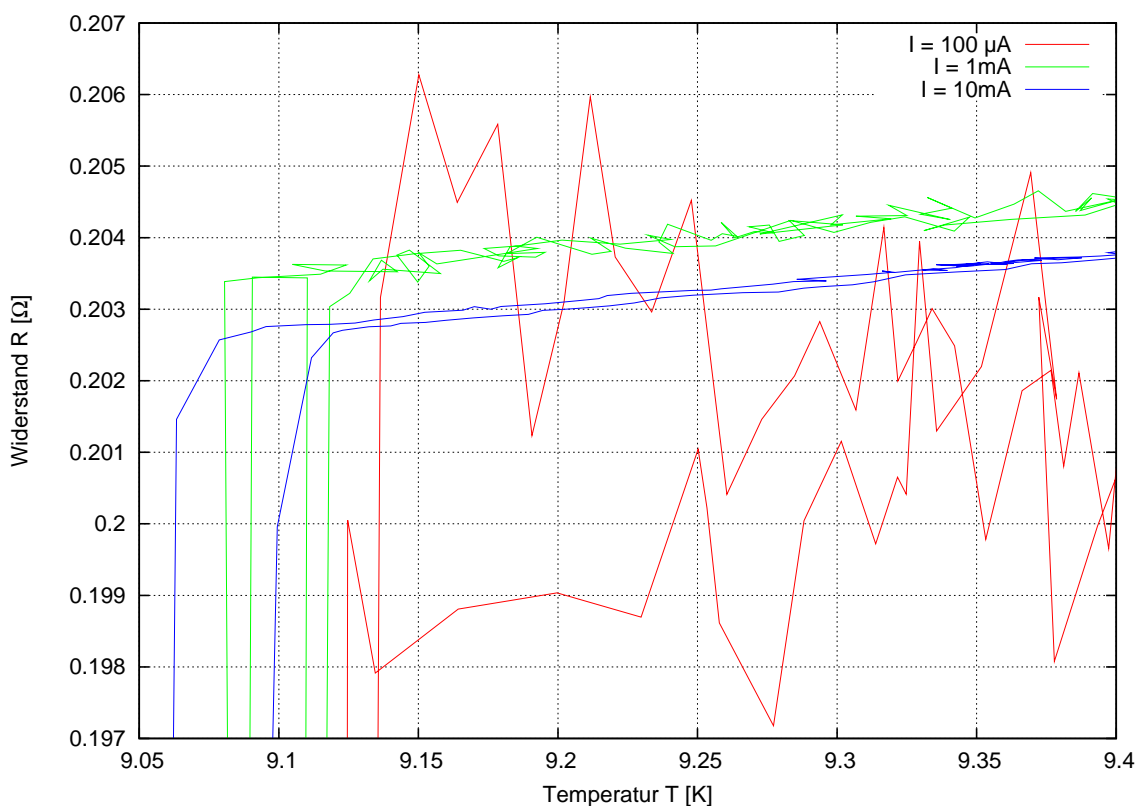


Abbildung 9: Widerstand der Nb-Probe in Abhängigkeit der Temperatur. Eingezeichnet sind die ermittelten Sprungtemperaturen T_c .

Hieraus läßt sich nun der Restwiderstand der Niob-Probe ablesen.

I [mA]	R [Ω]
0.1	-
1	0.2035
10	0.2025

Und wir erhalten als Mittelwert

$$R = (0.203 \pm 0.005)\Omega$$

Daraus läßt sich nun der spezifische Rest-Widerstand ρ berechnen:

$$\rho = R \frac{A}{l} = 0.203 \Omega \frac{200 \text{nm} \cdot 20 \mu\text{m}}{0.4 \text{mm}} = (2.03 \cdot 10^{-9} \pm 5.0 \cdot 10^{-11}) \text{m}\Omega$$

Für hochreines Niob [May72] gilt:

$$\rho \cdot l = 3.72 \cdot 10^{-6} \mu\Omega \text{cm}^2$$

Daraus lässt sich die freie Weglänge bestimmen:

$$l = \frac{3.72 \cdot 10^{-6} \mu\Omega \text{cm}^2}{\rho} = 1.832 \cdot 10^{-7} \pm 4.51 \cdot 10^{-9} \text{m}$$

Die mittlere freie Weglänge ist somit nahe an der Probendicke von $2 \cdot 10^{-7} \text{m}$.

3.2.1 Ginzburg Landau-Parameter

Die intrinsische Kohärenzlänge für hochreines Niob ist 38nm, die Londonsche Eindringtiefe λ_L ist 39nm.

$$\kappa_{clean} = 0.95 \cdot \frac{\lambda_L}{\xi_0} = 0.95 \cdot \frac{39 \text{nm}}{38 \text{nm}} = 0.923 > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ab einem Wert von $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$ spricht man von einem Typ-II-Supraleiter, was Niob wie wir hier sehen ist. Für $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$ handelt es sich um Typ-I-Supraleiter.

3.3 Flux-Flow-Messungen

Zur Bestimmung des kritischen Feldes B_{c2} wurden Strom-Spannungs-Kennlinien bei verschiedenen Magnetfeldern B aufgenommen. Im linearen Bereich der Kurve läßt sich der Flux-Flow-Widerstand R ablesen, wobei wir aus den ersten 3 Messungen auf Grund des starken Rauschens keine Widerstand abgelesen haben.

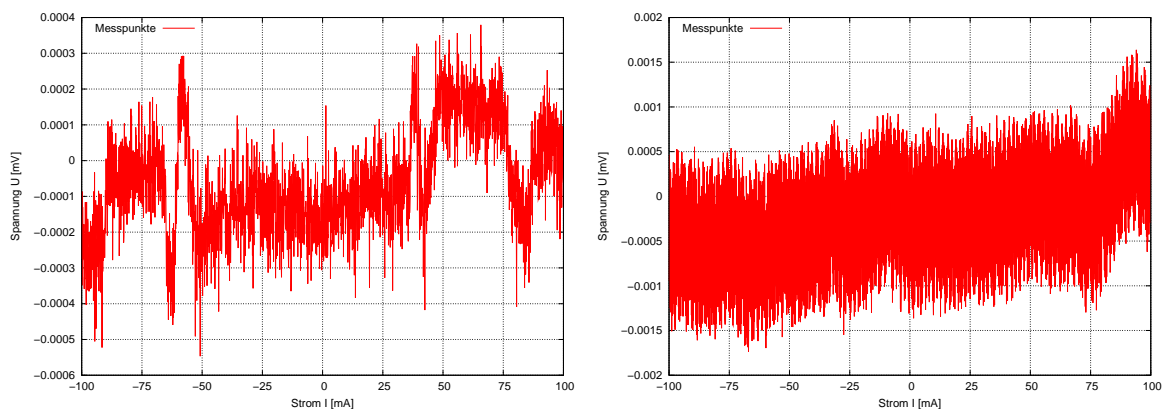


Abbildung 10: Strom-Spannungs-Kennlinien bei verschiedenen Magnetfeldern $B = 0 \text{mT}$ (links) und $B = 25.5 \text{mT}$ (rechts)

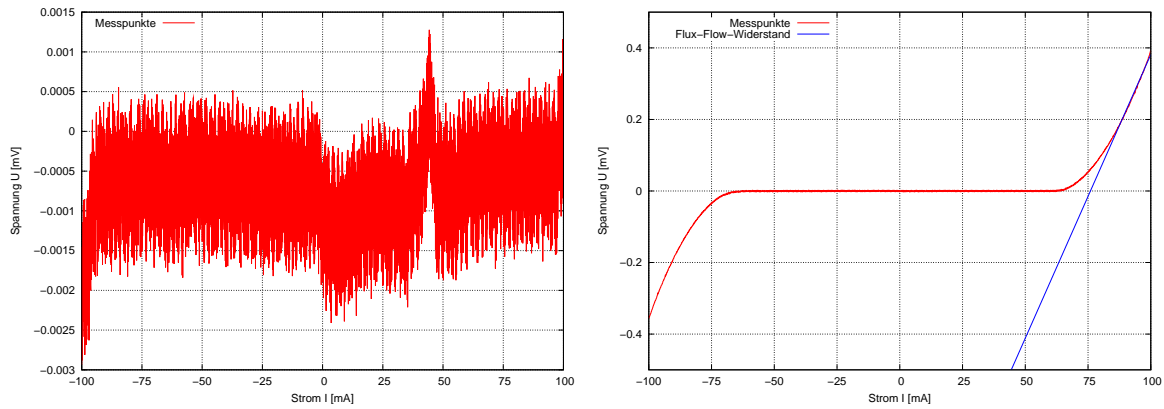


Abbildung 11: Strom-Spannungs-Kennlinien bei verschiedenen Magnetfeldern $B = 51\text{mT}$ (links) und $B = 76.5\text{mT}$ (rechts)

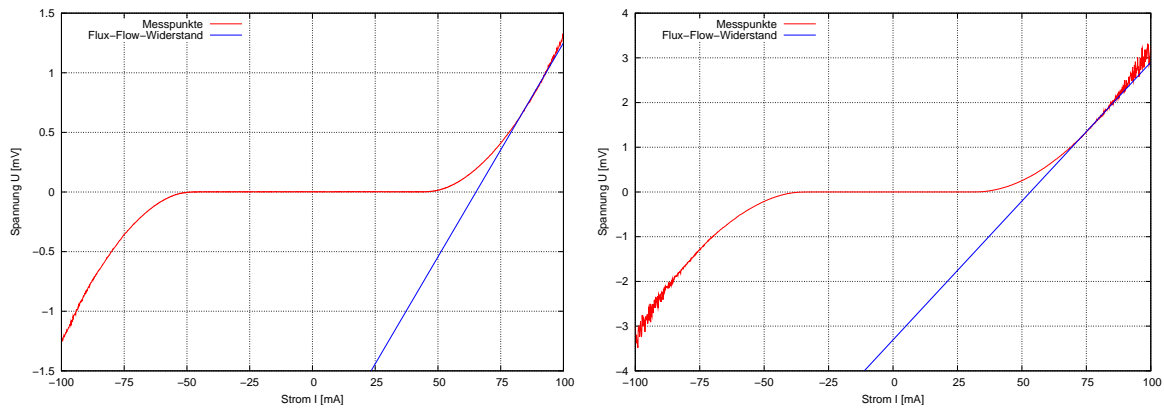


Abbildung 12: Strom-Spannungs-Kennlinien bei verschiedenen Magnetfeldern $B = 102\text{mT}$ (links) und $B = 127.5\text{mT}$ (rechts)

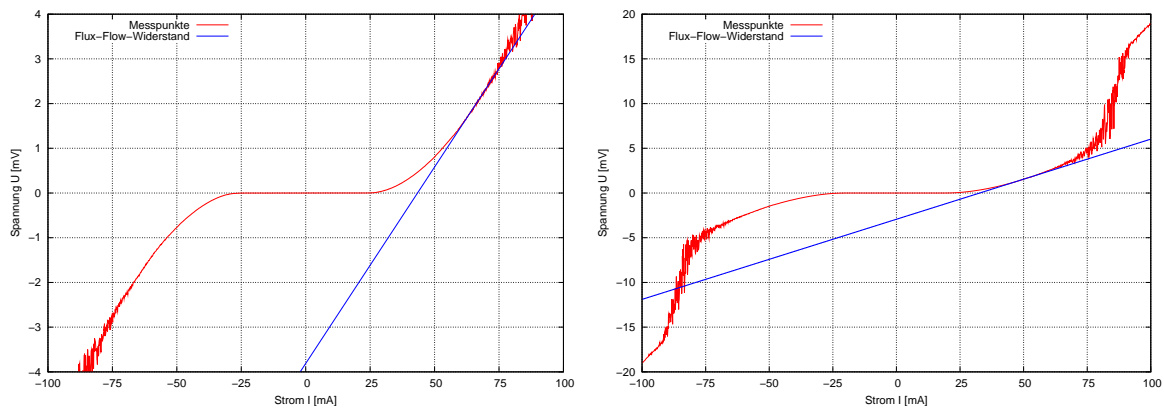


Abbildung 13: Strom-Spannungs-Kennlinien bei verschiedenen Magnetfeldern $B = 153\text{mT}$ (links) und $B = 178.5\text{mT}$ (rechts)

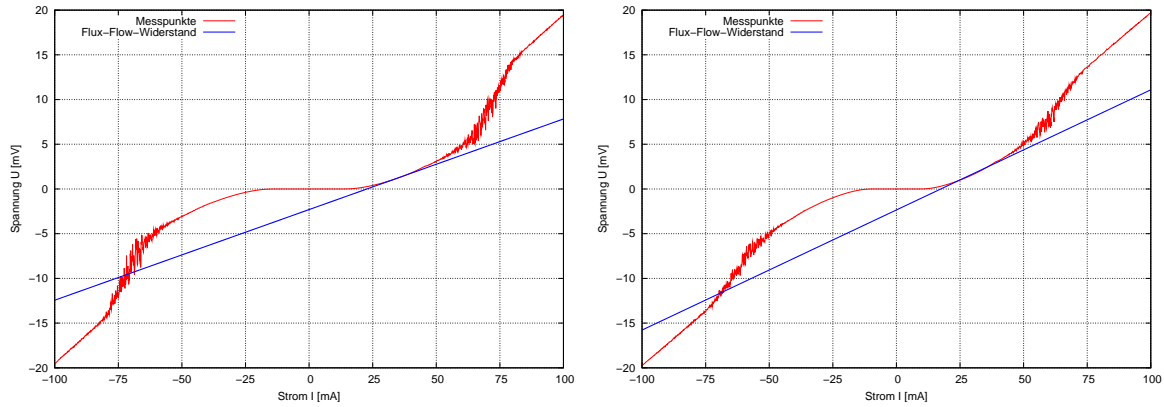


Abbildung 14: Strom-Spannungs-Kennlinien bei verschiedenen Magnetfeldern $B = 204 \text{ mT}$ (links) und $B = 229.5 \text{ mT}$ (rechts)

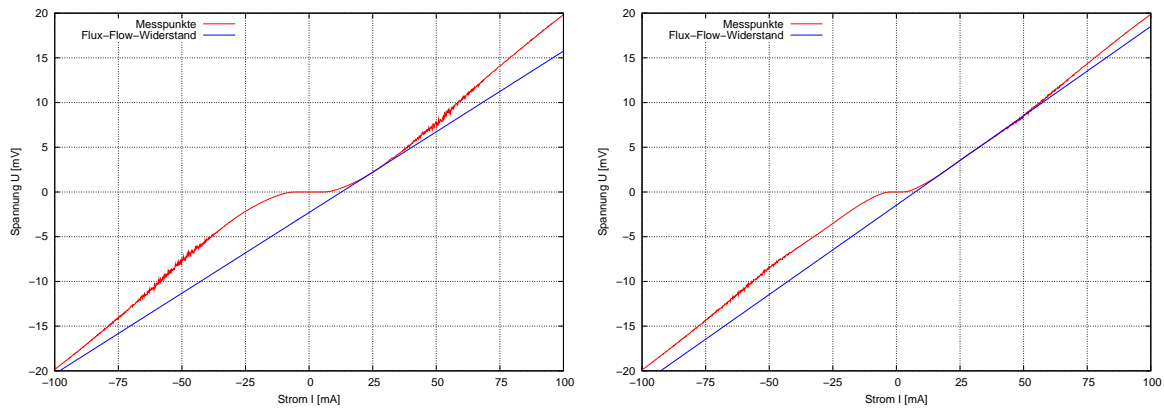


Abbildung 15: Strom-Spannungs-Kennlinien bei verschiedenen Magnetfeldern $B = 255 \text{ mT}$ (links) und $B = 280.5 \text{ mT}$ (rechts)

Trägt man nun alle ermittelten Widerstände in ein Diagramm ein, so erhält man

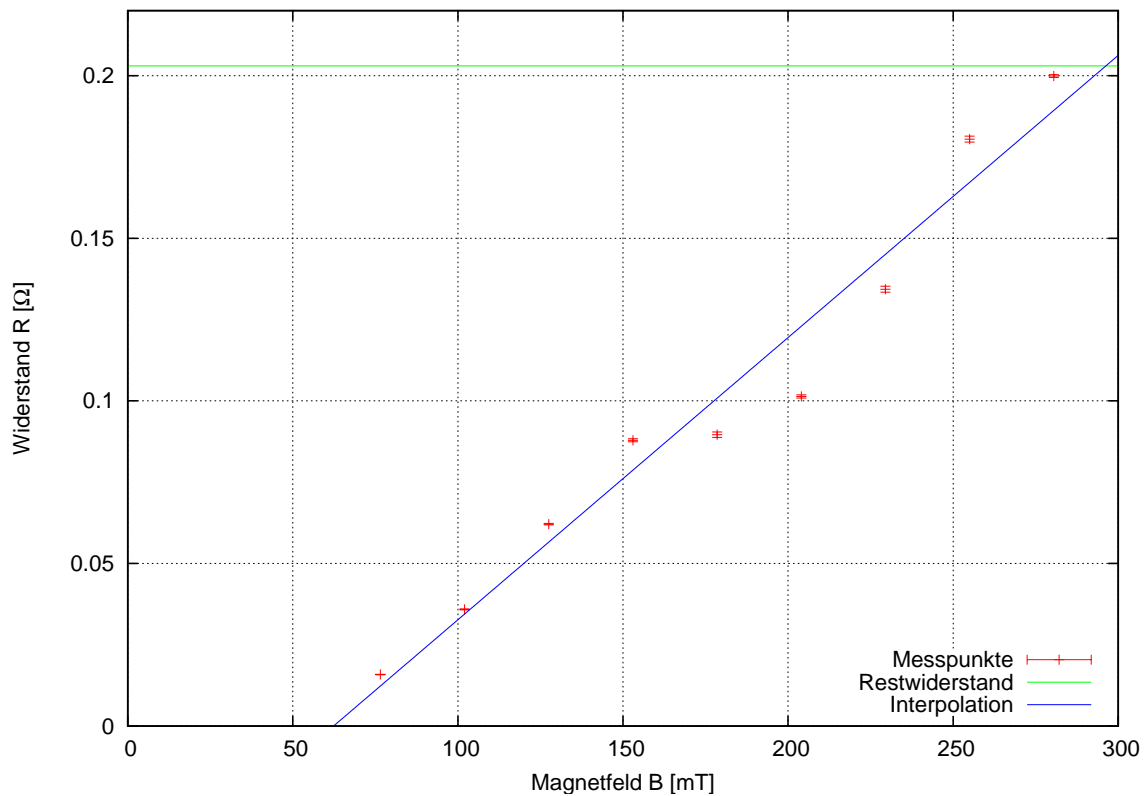


Abbildung 16: Flux-Flow-Widerstand R in Abhängigkeit des Magnetfelds B

wobei die blaue Interpolationskurve durch

$$R(B) = 0.000867818 \cdot B - 0.054091$$

gegeben ist. Um die kritische Feldstärke B_{c2} zu ermitteln, untersuchen wir, wann $R(B) = R_{Rest}$. Das ist genau bei $B_{c2} = 296.25\text{mT}$ der Fall. Den theoretischen Wert von B_{c2} berechnet man durch

$$B_{c2} = \sqrt{2} \kappa_{clean} \cdot B_{c0}, \text{ wobei}$$

$$B_{c0} = \frac{\Phi_0}{\pi^2} \sqrt{3/2} \frac{1}{\xi_0 \lambda_0} \text{ und somit}$$

$$B_{c2} = 238.6\text{mT}$$

Die Dämpfungskonstante η der Flusslinienbewegung ist

$$\eta = \frac{\Phi_0 B_{c2}}{\rho} = 2.430 \cdot 10^{-7} \pm 5.98 \cdot 10^{-9} \frac{\text{T}^2 \text{m}}{\Omega}$$

Daraus kann man die Kohärenzlänge bestimmen

$$\xi = \sqrt{\frac{\phi_0 \cdot 0.95 \cdot \sqrt{3}}{B_{c2} \cdot \pi^2}} = 35.08\text{nm}$$

und daraus die Eindringtiefe λ über die Relation $\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$

$$\lambda = \kappa \cdot \xi = 34.20\text{nm}$$

3.4 Flusslinien, Ordnungsparameter

$$U = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} N\phi_0$$
$$\dot{N} = \frac{U}{\phi_0}$$

Die Messung bei $B = 102\text{mT}$ (Magnetstrom 2A, Probenstrom 80mA) hatte die glatteste Kurve. Bei einem Strom von 80mA kommen wir auf die Spannung von 0.552mV.

Daraus folgt die Zahl der Flusslinien, welche die Probe pro Zeit durchqueren:

$$\dot{N} = \frac{U}{\phi_0} = \frac{0.5512 \cdot 10^{-3}\text{V}}{\phi_0} = 2.669 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{s}}$$

Nun können wir die Dichte der Flusslinien bestimmen:

$$\rho_{lines} = \frac{N}{A} = \frac{\phi}{\phi_0 \cdot A} = \frac{B}{\phi_0} = 4.935 \cdot 10^{13} \frac{1}{\text{m}^2}$$

Multipliziert mit der Fläche kommen wir zu der Anzahl der Flusslinien

$$N = \rho_{lines} \cdot A = 4.935 \cdot 10^{13} \cdot 0.4\text{mm} \cdot 20\mu\text{m} = 3.948 \cdot 10^5$$

Und daraus die Geschwindigkeit

$$v = \frac{\dot{N}}{N} b = \frac{2.669 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{s}}}{3.948 \cdot 10^5} \cdot 20\mu\text{m} = 13.52 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Literatur

- [BCHR07] Biesinger, Daniel ; Christmann, Stefan ; Hartmann, Stephan ; Reiß, Katharina: Supraleitung. In: *Praktikumsprotokoll SS2007* (2007) 2, 5
- [BK04] Buckel, Werner ; Kleiner, Reinhold: *Supraleitung*. Wiley, 2004 2, 3, 4, 6
- [May72] Mayadas, A.F.: Electrical Characteristics of rf-Sputtered Single-Crystal Niobium Films. In: *Journal of Applied Physics* 43, p.1287 (1972) 9