

Sättigungsspektroskopie (SSP)

Fortgeschrittenen Praktikum, SS 2008

Alexander Seizinger, Michael Ziller, Philipp Buchegger, Tobias Müller
Betreuer: Philipp Schneeweiß

Tübingen, den 27. Mai 2008

1 Einführung

Die Untersuchung atomarer Spektren ist eine der grundlegenden Aufgaben in der Atomphysik. Theoretisch können diese in der Quantenmechanik als Energieeigenwerte der Lösungen der stationären Schrödinger-Gleichung berechnet werden. Experimentell lassen sie sich mit spektroskopischen Methoden beobachten. Die **Dopplerverbreiterung** verschmiert jedoch die absorbierten Frequenzen und begrenzt dadurch das Auflösungsvermögen. Durch die im folgenden vorgestellte **Sättigungsspektroskopie** lässt sich die störende Dopplerverbreiterung unterdrücken, es können auch feinere Energieunterschiede, wie sie beispielsweise für die Beobachtung der Feinstruktur notwendig sind, aufgelöst werden.

2 Theorie

2.1 Laser

Laserlicht findet in zahlreichen Gebieten der modernen Technik umfangreiche Anwendung. Die wesentlichen Eigenschaften die Laserlicht für technische Anwendungen auszeichnet sind:

- a) Zeitliche und räumliche Kohärenz
- b) Monochromasie
- c) hohe Intensität

Damit ein Material als aktives Medium für die Erzeugung von Laserlicht dienen kann, muss es zur Besetzungsinversion kommen. Bei dem im Skript diskutierten Zwei-Niveau-Laser ist ein maximales Besetzungsverhältnis der beiden Niveaus von 50:50 möglich. Um ein besseres Verhältnis zu erhalten, ist die Nutzung eines Pumpniveaus erforderlich (Abb. 1). Bei dem in der Abbildung dargestellten Vier-Niveau-System werden die Atome vom Grundzustand mit einer kurzen Übergangszeit in das Pumpniveau mit Energie E_4 angehoben. Von E_4 erfolgt ein strahlungsloser Übergang in das



Abbildung 1: Vier-Niveau-System

Laserausgangsniveau mit Energie E_3 . Um die genannte möglichst große Besetzungsinversion zu erhalten, erfolgt dieser TransformatiÜbergang von E_3 nach E_2 statt. Dieser Übergang ist durch eine kleine Lebensdauer gekennzeichnet. Im Anschluss daran geht das System strahlungslos wieder in den Grundzustand über.

Die Emissionswellenlänge λ des in der Anleitung beschriebenen Single-Mode-Lasers ist wesentlich von der Resonatorlänge L abhängig. Für die Mode m gilt der Zusammenhang:

$$L = m \frac{\lambda}{2n} \quad (1)$$

mit dem Brechungsindex n . Nimmt man eine lineare Abhängigkeit der Resonatorlänge von der Temperatur an,

$$L(T) = L_0 + \sigma_{\text{Res}} L_0 \cdot T, \quad (2)$$

so lässt sich die Wellenlänge über folgende Beziehung durch Veränderung der Temperatur einstellen:

$$\Delta\lambda = \frac{2n}{m} (L_0 \sigma_{\text{Res}} (T_2 - T_1)) \quad (3)$$

Hier bezeichnet σ_{Res} den thermischen Ausdehnungskoeffizienten des Resonatormaterials.

Um den Single-Mode-Betrieb zu ermöglichen muss weiterhin für das vor dem Laser angebrachte Gitter die Bedingung gelten:

$$2d \sin \alpha = k\lambda \quad (4)$$

Mit dem Winkel α , der Maximumsordnung k , der Gitterkonstanten d und der Wellenlänge λ . Ist diese Gleichung erfüllt, so entsteht eine bemerkbare Rückreflektion in den Laser und es kommt zur Injektion einer Mode. Um eine Verstimmung des Lasers um 10 Ghz zu erreichen, ist es erforderlich den Winkel α um

$$\Delta\alpha = \arcsin \left(\frac{c}{2d \cdot f} \right) - \arcsin \left(\frac{c}{2d \cdot (f + 10^{10})} \right) = 4.369\text{Grad} \quad (5)$$

zu variieren.

2.2 Spektren von Alkaliatomen

2.2.1 Spektrum des Wasserstoffatoms

Betrachten wir zunächst das Spektrum des Wasserstoff-Atoms. Quantenmechanisch können wir dies im Schwerpunktsystem näherungsweise als Bewegung (wobei dies nicht zu wörtlich zu nehmen ist, es handelt sich um ein stationäres Problem) eines Elektrons in einem Zentralpotential beschreiben. Als Basis für die folgenden Rechnung verwenden wir der Einfachheit halber das CGS-System, es ergibt sich dann der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta - \frac{e^2}{r}$$

und damit die stationäre Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta - \frac{e^2}{r}\right)\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = E_{nlm}\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) \quad (6)$$

Da die Operatoren \hat{H} , \hat{L}^2 und \hat{L}_z kommutieren (und somit ein gemeinsames System aus Eigenzuständen existiert) ist ein Zustand durch Angabe der jeweiligen Eigenwerte n , l und m bestimmt. Für die Lösung $\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$ machen wir den Separationsansatz

$$\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{u_{nl}(r)}{r}Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

wobei die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ gerade die Eigenfunktionen des Δ -Operators auf der Kugel bezeichnen. Damit reduziert sich unser Problem (6) darauf, die Lösung $u_{nl}(r)$ der radialen Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\partial_r^2 + \frac{\hbar^2}{2\mu r^2}l(l+1) - \frac{e^2}{r}\right)u_{nl}(r) = E_{nl}u_{nl}(r) \quad (7)$$

zu finden. Uns interessieren an dieser Stelle nur die **Energieeigenwerte** E_{nl} , man bestimmt diese zu

$$E_n = -13.6\text{eV}\frac{1}{(n)^2} \quad n \in \mathbb{N}^+ \quad (8)$$

In diesem einfachen Modell hängen die Energien also nur von der Hauptquantenzahl n ab, man spricht von **l -Entartung**.

2.2.2 Feinstruktur

Berücksichtigt man jedoch zusätzliche Effekte wie zum Beispiel die Wechselwirkung des Elektronenspins mit dem Bahndrehimpuls des Elektrons so müssen wir dem Hamiltonoperator in (6) weitere Terme hinzufügen. Im CGS-System ergibt sich für das Beispiel der Spin-Bahn-Kopplung beispielsweise

$$\hat{H}_{LS} = -\frac{Ze^2}{2m_c^2c^2}\frac{1}{\hat{r}^3}\hat{L}\hat{S}$$

Die Herleitung dieses Terms findet man in fast jedem Lehrbuch zur Quantenmechanik. Eine exakte Lösung des um diesen Term erweiterten Problems ist nicht mehr möglich. Da der Effekt der Spin-Bahn-Kopplung jedoch klein gegenüber der Coulombwechselwirkung ist bleibt der Ausweg das Problem störungstheoretisch zu behandeln. Die gestörten Energieeigenwerte sind nicht mehr l -entartet, es ergeben sich kleine Energiekorrekturen gegenüber dem ungestörten Fall. Ein Eielektronensystem kann genau zwei ($s = \pm\frac{1}{2}$) verschiedene Spinprojektionseigenzustände annehmen, im Falle eines Alkaliatoms spaltet daher jedes Niveau unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Wechselwirkung in zwei Niveaus auf. Man spricht von der **Feinstruktur**.

2.2.3 Hyperfeinstruktur

Berücksichtigt man die Wechselwirkung des Kernspins \vec{I} mit dem Bahndrehimpuls \vec{J} so ergibt durch die Kopplung zu $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$ eine weitere Aufspaltung in $2F + 1$ Energieniveaus, man spricht von der **Hyperfeinstruktur**. Da die Kernspin-Bahn-Wechselwirkung viel schwächer als die Spin-Bahn-Wechselwirkung ist sind die Energiekorrekturen der Hyperfeinstruktur ungefähr um den Faktor 1000 schwächer als die der Feinstruktur.

2.2.4 Spektrum von wasserstoffähnlichen Atomen

Bei Alkali-Atomen befinden sich im Grundzustand $(Z - 1)$ -Elektronen in abgeschlossenen Schalen weiter innen und ein einzelnes (Leucht)Elektron weiter außen, wobei die Begriffe innen und außen in dem Sinne zu verstehen sind, dass man beispielsweise den Abstand vom Kern am Ort der mittleren Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen betrachtet. Das äußere Elektron befindet sich im Potential des Kerns $\frac{Ze^2}{r}$, welches jedoch durch die $(Z - 1)$ inneren Elektronen überwiegend abgeschirmt wird. Man ersetzt daher das Potential aus (6) durch ein **effektives Potential** V_{eff} , welches den Abschirmeffekt der inneren Elektronen berücksichtigt, es gilt

$$V_{eff}(r) \approx -\frac{Ze^2}{r} \quad \text{für } r \text{ klein genug}$$
$$V_{eff}(r) \approx -\frac{e^2}{r} \quad \text{für } r \text{ groß genug}$$
$$-\frac{Ze^2}{r} < V_{eff}(r) < -\frac{e^2}{r}$$

Wir haben unser Problem damit auf ein Zweiteilchenproblem reduziert, da allerdings nicht mehr $V_{eff} \sim \frac{1}{r}$ gilt, wird die l -Entartung der Energieniveaus aufgehoben. Für festes n liegen die Energieeigenwerte des Alkaliatoms im Bezug zum Wasserstoffatom umso tiefer, je kleiner l ist. Anschaulich kann man dies damit begründen, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Valenzelektrons in Kernnähe umso größer ist, je kleiner l ist. Für kleine l wird daher die im Vergleich zum Wasserstoffatom um ein Vielfaches größere Kernladung von den inneren Elektronen schwächer abgeschirmt, der Coulomb-Term ist also größer als beim Wasserstoffatom, was eine höhere Bindungsenergie zur Folge hat.

2.2.5 Auswahlregeln

Durch Einstrahlen einer elektromagnetischen Welle kommt es zu Übergängen zwischen den in den vorherigen Überlegungen bestimmten Energieeigenzuständen. Quantenmechanisch beschreibt man diesen Vorgang mit Hilfe der Übergangsmatrix, deren Elemente die Wahrscheinlichkeit angeben, dass ein Übergang zwischen Ausgangs- und Endzustand stattfindet. In erster Ordnung (zeitabhängiger) Störungstheorie berechnet man diese über **Fermis Goldene Regel**. In der Praxis sind wir nur an solchen Übergängen interessiert, deren Wahrscheinlichkeit hinreichend groß ist, was jedoch nicht bedeutet, dass andere Übergänge prinzipiell nicht möglich sind - ihre Übergangswahrscheinlichkeiten sind aber so gering, dass sie experimentell keine Rolle spielen. Betrachten wir die **elektrischen Dipolübergänge**, so

gelten für die Differenzen der oben eingeführten Quantenzahlen zweier Zustände die **Auswahlregeln**

$$\begin{aligned}\Delta l &\in \{-1, 1\} \\ \Delta m &\in \{-1, 0, 1\} \\ \Delta s &= 0\end{aligned}$$

Für Übergänge der Hyperfeinstruktur gilt

$$\begin{aligned}\Delta F &\in \{-1, 0, 1\} && \text{für } F \neq 0 \\ \Delta F &\in \{-1, 1\} && \text{für } F = 0 \\ \Delta m_F &\in \{-1, 0, 1\}\end{aligned}$$

2.3 Dopplerverbreiterung

Der **Dopplereffekt** beschreibt die Veränderung der Wellenlänge λ bzw. Frequenz f , falls sich der Sender relativ zum Empfänger bewegt. Es gilt

$$f = f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (9)$$

wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle (in unserem Fall also gerade die Lichtgeschwindigkeit), f_0 die Frequenz des Senders, f die Frequenz, die der Empfänger misst, und v die Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger bezeichnet. Die Empfänger sind in unserem Fall die Rubidium-Atome, aus denen die Probe besteht, der Sender der Laser. Die Relativgeschwindigkeit entspricht den Geschwindigkeiten der Teilchen aufgrund der thermischen Bewegung. Nehmen wir wie in der Versuchsanleitung beschrieben eine **Maxwell-Verteilung** der Teilchengeschwindigkeiten an

$$P(v)dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \quad (10)$$

und stellen Gleichung (9) nach v um

$$v = c \frac{f - f_0}{f_0} = c \left(\frac{f}{f_0} - 1\right)$$

Substituieren wir in Gleichung (10) v durch obigen Ausdruck ergibt sich mit $dv = \frac{c}{f_0} df$

$$P(f)df = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \frac{c}{f_0} e^{-\frac{m}{2kT} c^2 \left(\frac{f}{f_0} - 1\right)^2} df = \sqrt{\frac{mc^2}{2\pi kT f_0^2}} e^{-\frac{mc^2}{2kT f_0^2} (f - f_0)^2} df \quad (11)$$

Dies entspricht gerade einer Normalverteilung mit Standardabweichung $\sigma_f = \sqrt{\frac{kT}{mc^2}} f_0$. Absorbieren die Atome also elektromagnetische Strahlung einer bestimmten Frequenz f_0 , so werden durch die thermische Bewegung auch benachbarte Frequenzen absorbiert, statt einer scharfen Linie beobachtet man ein breites Tal. Liegen zwei Energieniveaus sehr nahe beieinander, wie es beispielsweise bei den Energieniveaus der Hyperfeinstruktur der Fall ist, so verhindert die Dopplerverbreiterung eine hinreichend feine Auflösung. Für die Beobachtung der Hyperfeinstruktur müssen wir daher eine Möglichkeit finden, diesen störenden Effekt zu unterdrücken.

3 Sättigungsspektroskopie

Um die Dopplerverbreiterung zu eliminieren, wird bei der Sättigungsspektroskopie zusätzlich zum Teststrahl ein antiparalleler eingestrahelter Pumpstrahl verwendet um den Grundzustand zu entvölkern. Weist dieser genau die Wellenlänge der theoretischen Absorptionslinie der Probe auf, so gilt für die adressierte Geschwindigkeitsklasse von Atomen:

$$v_{x,\text{satt}} = \frac{\nu - \nu_0}{k} = 0, \quad (12)$$

mit der Laserlichtfrequenz ν , der Frequenz des Atomaren Übergangs ν_0 und der Wellenzahl k . Gleiches gilt auch für den Teststrahl. In diesem Fall adressieren beide Strahlen die selbe Geschwindigkeitsklasse der sich in Ruhe befindenden Atome. Der Sättigungsstrahl vermindert also die Anzahl zur Absorption des Teststrahls fähigen Atome.

Kommt es zu einer Rotverstimung des Lasers, so wirken die beiden Strahlen auf unterschiedliche Geschwindigkeitsklassen ein. Es gilt mit $\nu - \nu_0 < 0$:

$$v_{x,\text{satt}} = \frac{\nu - \nu_0}{k} < 0, \quad (13)$$

$$v_{x,\text{test}} = -\frac{\nu - \nu_0}{k} > 0 \quad (14)$$

Zeigt das Probenmaterial dicht benachbarte Resonanzen bei ν_1 und ν_2 auf, so kann es aufgrund der Bewegung der Atome zu Cross-Over-Resonanzen kommen. Diese Resonanzen weisen aufgrund der größeren Zahl beteiligter Atome (mehr Geschwindigkeitsklassen) eine höhere Intensität im aufgenommenen Absorptionsspektrum auf. Weiterhin stellt man fest, dass Cross-Over-Resonanzen im Spektrum immer mittig zwischen den beteiligten Übergängen liegen. Es sei ν die Laserfrequenz. Es gilt $\nu_1 < \nu < \nu_2$. Zur Absorption der zwei Strahlen tragen Atome aus jeweils zwei Geschwindigkeitsklassen bei:

$$v_{\text{satt},1} = \frac{\nu - \nu_1}{k} \quad (15)$$

$$v_{\text{satt},2} = -\frac{\nu - \nu_2}{k} \quad (16)$$

$$v_{\text{test},1} = -\frac{\nu - \nu_1}{k} \quad (17)$$

$$v_{\text{test},2} = \frac{\nu - \nu_2}{k} \quad (18)$$

Damit mit Sättigungsstrahl für den Übergang 1 und der der Teststrahl für den Übergang 2 zusammenfallen, muss gelten:

$$v_{\text{satt},1} = \frac{\nu - \nu_1}{k} = v_{\text{test},2} = \frac{\nu - \nu_2}{k} \quad (19)$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \quad (20)$$

Um derartige Cross-Over-Peaks im Spektrum zu beobachten müssen die beteiligten Übergänge innerhalb der dopplerverbreiterten Aufweitung der beiden Resonanzen liegen.

4 Auswertung

4.1 Absorbtionsspektroskopie

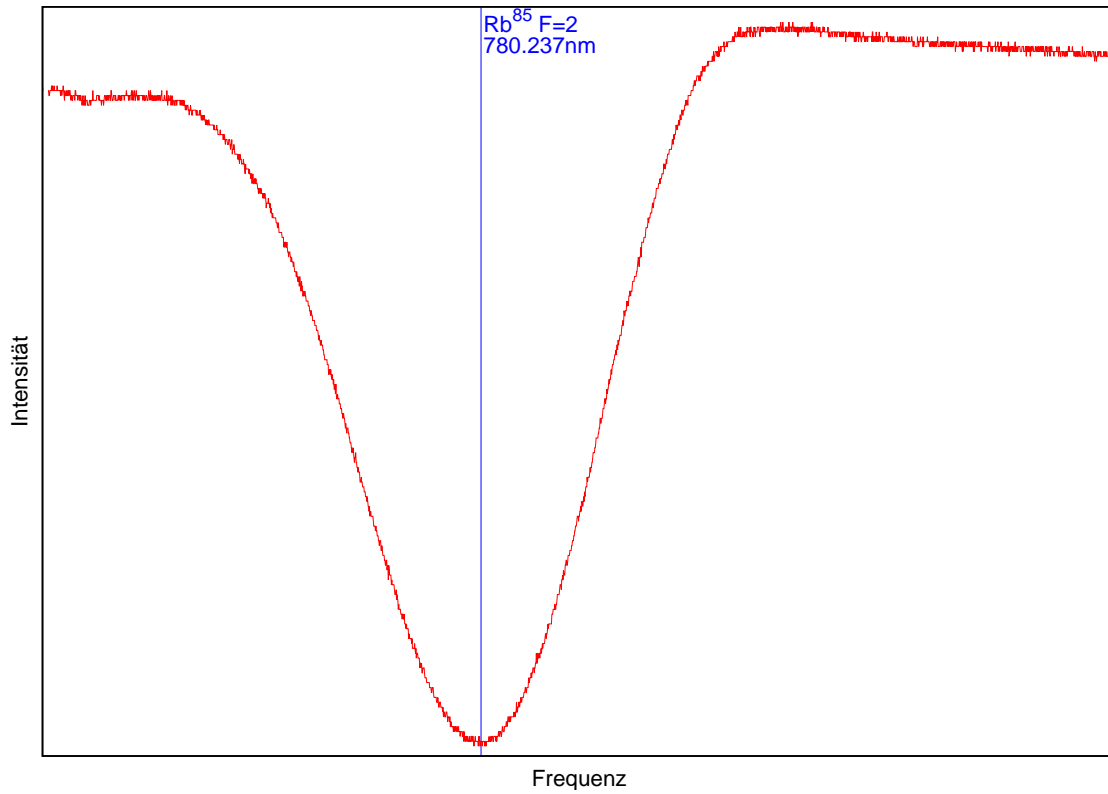


Abbildung 2: Absorbtionsspektrum der ⁸⁵Rb F=2 Linie

Zu sehen ist das Absorbtionsspektrum von ⁸⁵Rb bei $F = 2$. Die Wellenlänge beträgt $\lambda = 780.237\text{nm}$. Dieses Spektrum wurde bei einem Strom von 94mA und einer Temperatur von 16.6°C aufgenommen.

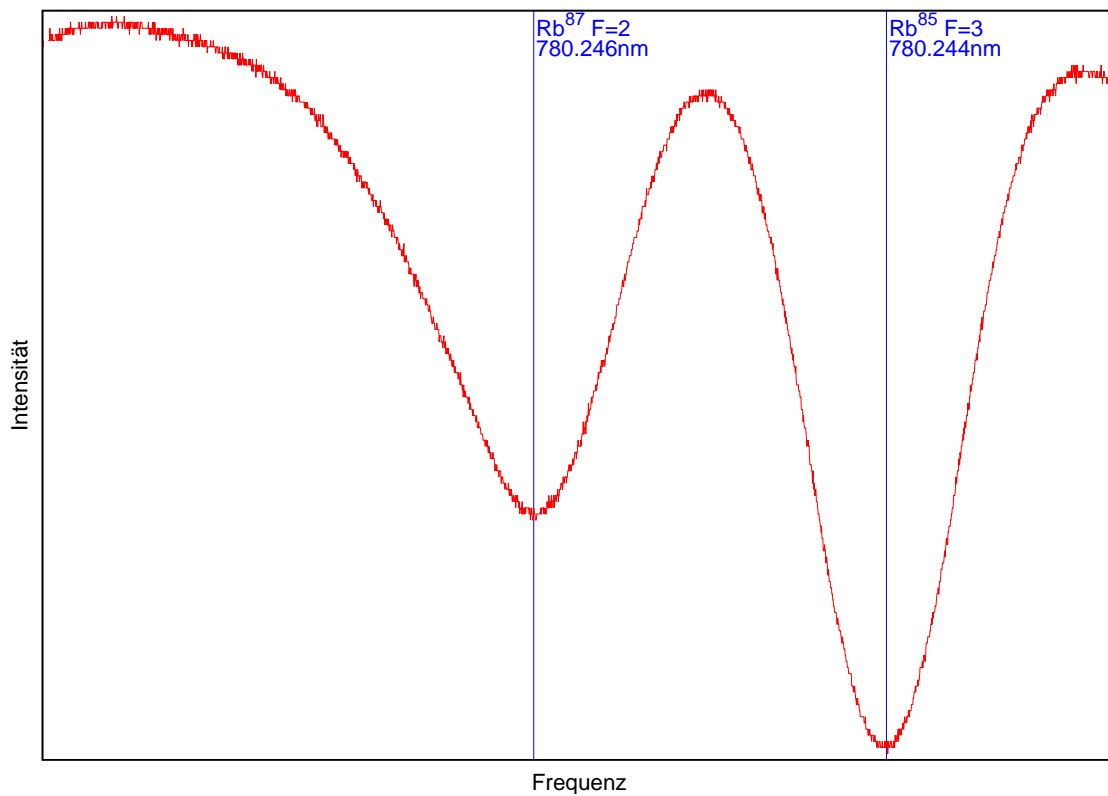


Abbildung 3: Absorptionsspektrum der ⁸⁷Rb F=2 und ⁸⁵Rb F=3 Linien

Diese beiden Peaks wollen wir uns im Folgenden mittels Sättigungsspektroskopie genauer ansehen. Wie hier schon für $F = 2$ zu erkennen ist, gibt es mehrere kleine Aufspaltungen.

4.2 Sättigungsspektroskopie

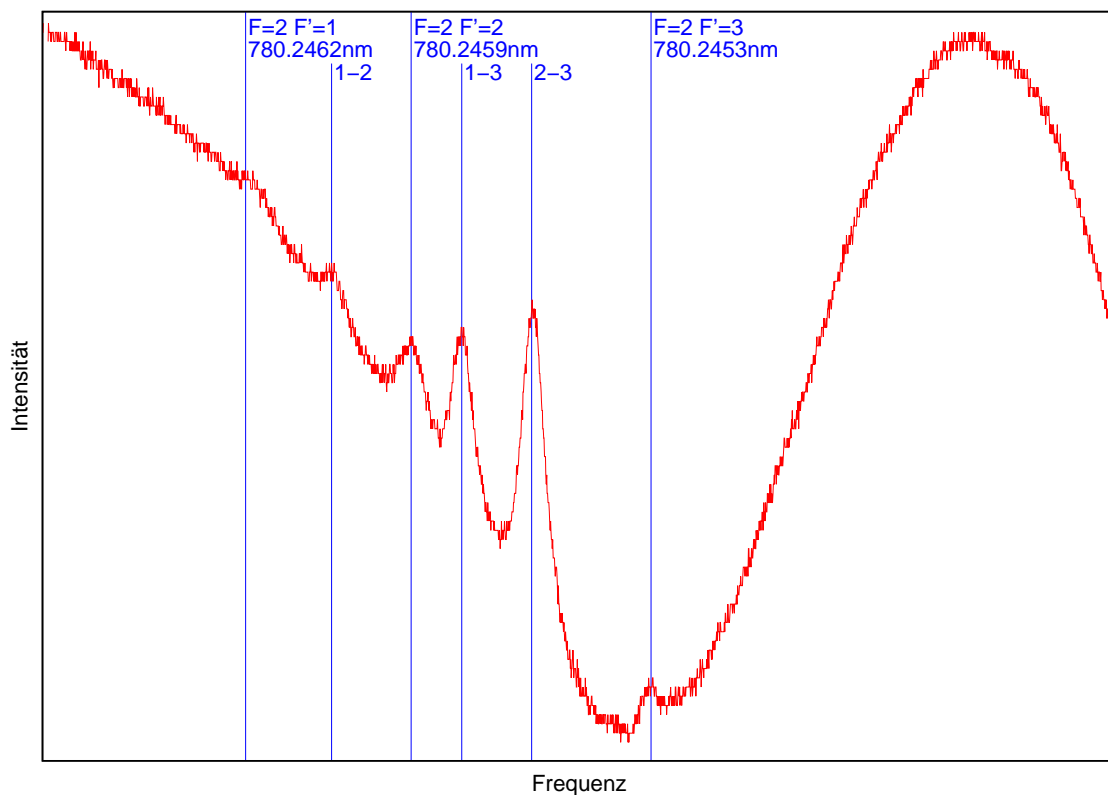


Abbildung 4: Sättigungsspektrum der ^{87}Rb $F=2$ Linie

Hier sind die Übergänge von $F = 2$ zu sehen. Die Wellenlängen der Hyperfeinübergänge sind

F	F'	λ [nm]
2	1	780.2462
2	2	780.2459
2	3	780.2453

Die mit 1-2, 1-3 und 2-3 gekennzeichneten Linien sind die zu den Übergängen dazugehörigen, viel stärker ausfallenden Cross-Over-Peaks. Dieses Spektrum wurde bei einem Strom von 66mA und einer Temperatur von 16.5°C aufgenommen.

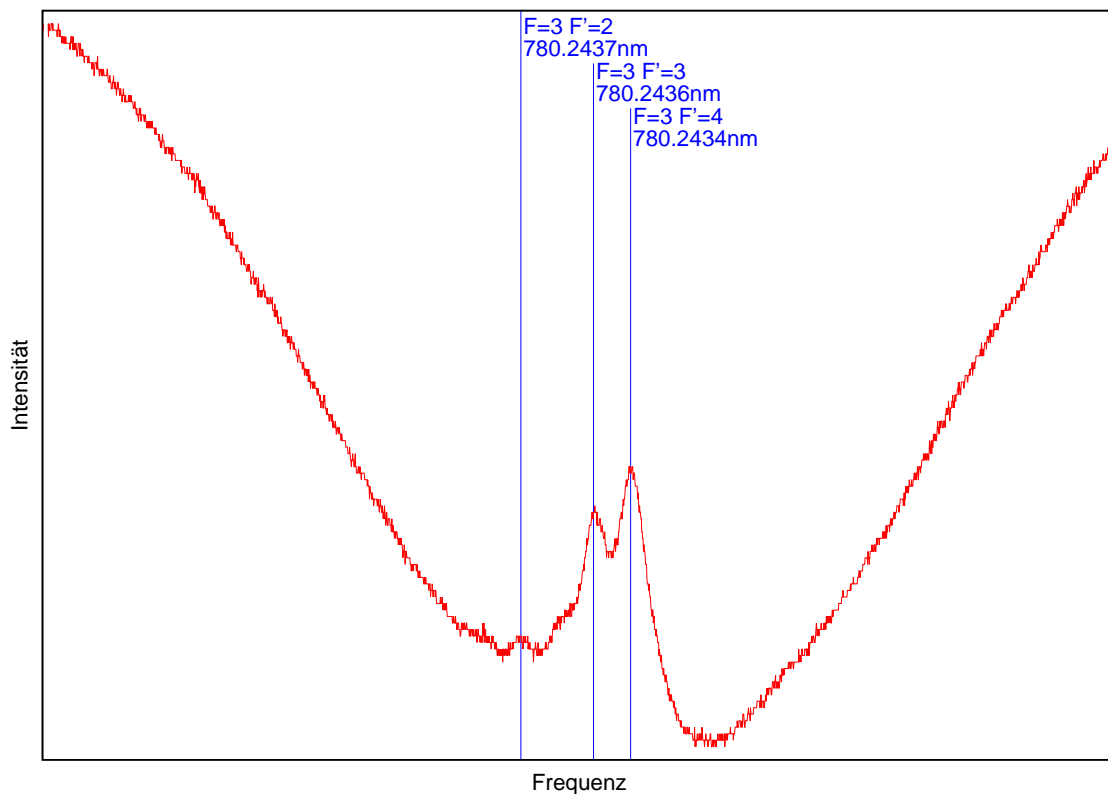


Abbildung 5: Sättigungsspektrum der ^{85}Rb F=3 Linie

Die 3 Hyperfeinübergänge haben die Wellenlängen

F	F'	λ [nm]
3	2	780.2437
3	3	780.2436
3	4	780.2434

Wenn wir die Temperatur erhöhen, dann verschiebt sich das Spektrum nach rechts. Daraus schließen wir, dass die Wellenlänge nach rechts abnimmt. Dieses Spektrum wurde bei einem Strom von 95mA und einer Temperatur von 19.1°C aufgenommen.

5 Anhang

- Maple-File zur Berechnung der Wellenlängen

```

> restart;
> # Lichtgeschwindigkeit
c := 299792458*_m/_s;
# Grundfrequenz der D2-Linie
lambdaD2 := 780.241E-9*_m;
# D2-Linien der Isotope
Rb85_D2 := c/lambdaD2;
Rb87_D2 := Rb85_D2 + (80+160)*1E6/_s;
           c:=  $\frac{299792458 \text{ _m}}{\text{ _s}}$ 
           lambdaD2:=  $7.80241 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$ 
           Rb85_D2:=  $\frac{3.842305877 \cdot 10^{14}}{\text{ _s}}$ 
           Rb87_D2:=  $\frac{3.842308277 \cdot 10^{14}}{\text{ _s}}$ 
> # Korrekturen der HFS
Rb85_S_F3 := -1265*1E6/_s;
Rb85_S_F2 := (-1265+3036)*1E6/_s;
Rb85_P_F1 := (100-121-63-29)*1E6/_s;;
Rb85_P_F2 := (100-121-63)*1E6/_s;;
Rb85_P_F3 := (100-121)*1E6/_s;;
Rb85_P_F4 := (100)*1E6/_s;
Rb87_S_F1 := (-2563+6835)*1E6/_s;
Rb87_S_F2 := -2563*1E6/_s;
Rb87_P_F0 := (194-267-157-72)*1E6/_s;
Rb87_P_F1 := (194-267-157)*1E6/_s;
Rb87_P_F2 := (194-267)*1E6/_s;
Rb87_P_F3 := 194*1E6/_s;
           Rb85_S_F3:= -  $\frac{1.265 \cdot 10^9}{\text{ _s}}$ 
           Rb85_S_F2:=  $\frac{1.771 \cdot 10^9}{\text{ _s}}$ 
           Rb85_P_F1:= -  $\frac{1.13 \cdot 10^8}{\text{ _s}}$ 
           Rb85_P_F2:= -  $\frac{8.4 \cdot 10^7}{\text{ _s}}$ 
           Rb85_P_F3:= -  $\frac{2.1 \cdot 10^7}{\text{ _s}}$ 
    
```

$$Rb85_P_F4 := \frac{1.00 \cdot 10^8}{_s}$$

$$Rb87_S_F1 := \frac{4.272 \cdot 10^9}{_s}$$

$$Rb87_S_F2 := - \frac{2.563 \cdot 10^9}{_s}$$

$$Rb87_P_F0 := - \frac{3.02 \cdot 10^8}{_s}$$

$$Rb87_P_F1 := - \frac{2.30 \cdot 10^8}{_s}$$

$$Rb87_P_F2 := - \frac{7.3 \cdot 10^7}{_s}$$

$$Rb87_P_F3 := \frac{1.94 \cdot 10^8}{_s}$$

> # Wellenlängen der "groben" Übergänge

$$\lambda_{Rb87_S_F2} := c / (Rb87_D2 + Rb87_S_F2);$$

$$\lambda_{Rb85_S_F3} := c / (Rb85_D2 + Rb85_S_F3);$$

$$\lambda_{Rb85_S_F2} := c / (Rb85_D2 + Rb85_S_F2);$$

$$\lambda_{Rb87_S_F1} := c / (Rb87_D2 + Rb87_S_F1);$$

$$\lambda_{Rb87_S_F2} := 7.802457173 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$$

$$\lambda_{Rb85_S_F3} := 7.802435688 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$$

$$\lambda_{Rb85_S_F2} := 7.802374038 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$$

$$\lambda_{Rb87_S_F1} := 7.802318378 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$$

> # Wellenlänge der "feinen" Übergänge

$$\lambda_{Rb87_S_F2_P_F1} := c / (Rb87_D2 + Rb87_S_F2 + Rb87_P_F1);$$

$$\lambda_{Rb87_S_F2_P_F2} := c / (Rb87_D2 + Rb87_S_F2 + Rb87_P_F2);$$

$$\lambda_{Rb87_S_F2_P_F3} := c / (Rb87_D2 + Rb87_S_F2 + Rb87_P_F3);$$

$$\lambda_{Rb85_S_F3_P_F2} := c / (Rb85_D2 + Rb85_S_F3 + Rb85_P_F2);$$

$$\lambda_{Rb85_S_F3_P_F3} := c / (Rb85_D2 + Rb85_S_F3 + Rb85_P_F3);$$

$$\lambda_{Rb85_S_F3_P_F4} := c / (Rb85_D2 + Rb85_S_F3 + Rb85_P_F4);$$

$$\lambda_{Rb85_S_F2_P_F1} := c / (Rb85_D2 + Rb85_S_F2 + Rb85_P_F1);$$

$$\lambda_{Rb85_S_F2_P_F2} := c / (Rb85_D2 + Rb85_S_F2 + Rb85_P_F2);$$

$$\lambda_{Rb85_S_F2_P_F3} := c / (Rb85_D2 + Rb85_S_F2 + Rb85_P_F3);$$

$$\lambda_{Rb87_S_F1_P_F0} := c / (Rb87_D2 + Rb87_S_F1 + Rb87_P_F0);$$

$\lambda_{Rb87_S_F1_P_F1} := c / (Rb87_D2 + Rb87_S_F1 + Rb87_P_F1);$
 $\lambda_{Rb87_S_F1_P_F2} := c / (Rb87_D2 + Rb87_S_F1 + Rb87_P_F2);$

$\lambda_{Rb87_S_F2_P_F1} := 7.802461844 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$

$\lambda_{Rb87_S_F2_P_F2} := 7.802458655 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$

$\lambda_{Rb87_S_F2_P_F3} := 7.802453234 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$

$\lambda_{Rb85_S_F3_P_F2} := 7.802437394 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$

$\lambda_{Rb85_S_F3_P_F3} := 7.802436115 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$

$\lambda_{Rb85_S_F3_P_F4} := 7.802433658 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$

$\lambda_{Rb85_S_F2_P_F1} := 7.802376332 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$

$\lambda_{Rb85_S_F2_P_F2} := 7.802375744 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$

$\lambda_{Rb85_S_F2_P_F3} := 7.802374464 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$

$\lambda_{Rb87_S_F1_P_F0} := 7.802324511 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$

$\lambda_{Rb87_S_F1_P_F1} := 7.802323049 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$

$\lambda_{Rb87_S_F1_P_F2} := 7.802319861 \cdot 10^{-7} \text{ _m}$

>