RE - Elektrische Resonanz
Blockpraktikum - Herbst 2005

Tobias Müller,Alexander Seizinger
Assistent: Dr. Thorsten Hehl

Tübingen, den 13. Oktober 2005

1 Vorwort

Analog zur mechanischen Resonanz kann man bei elektrischen Schwingkreisen ganz ähnliche Effekte beobachten. Hierzu untersuchten wir in diesem Versuch exemplarisch einige einfache Schwingkreise.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Komplexe Wechselstromlehre

An einen Stromkreis liege eine sinusförmige Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \cos\omega t$ an. Die Stromstärke I ändert sich dann ebenfalls periodisch, es gilt

$$I(t) = I_0 \cdot \cos\omega t$$

Mit der eulerschen Identität $\exp^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ lassen sich Spannung und Stromstärke auch komplex darstellen:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t} \qquad I(t) = I_0 \cdot e^{(i\omega t + \varphi)}$$

wobei die tatsächlich messbaren Werte nur dem Realteil entsprechen.

2.2 Widerstände im Wechselstromkreis

2.2.1 Spule

Legt man an eine Spule der Induktivität L eine Wechselspannung $U_\sim$ mit Kreisfrequenz ω an, so gilt nach der Kirchhoffschen Maschenregel

$$U_\sim(t) + U_L(t) = 0 \qquad \text{, wobei } U_\sim(t) = U_0 \sin\omega t$$

Die Spule induziert eine Gegenspannung $U_L = -L\frac{dI}{dt}$. Also ist

$$U_0 \ \sin\omega t \cdot \frac{1}{L} = \frac{dI(t)}{dt}$$

Durch Integrieren erhält man:

$$I(t) = -\frac{U_0}{\omega L} \cdot \cos\omega t$$

und somit für den komplexen Widerstand Z_L

$$Z_L = i \cdot \omega L$$

2.2.2 Kondensator

Analog zur Spule gilt bei einem Kondensator der Kapazität C, an den eine Wechselspannung angelegt wird:

$$U_\sim(t) + U_C(t) = 0$$

Für die am Kondensator abfallende Spannung gilt:

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

In obige Gleichung eingesetzt und nach $Q(t)$ aufgelöst ergibt sich:

$$Q(t) = -U_0 \sin\omega t \cdot C$$

Da $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$

$$I(t) = U_0 \cos\omega t \cdot C\omega$$

also ist der komplexe Widerstand eines Kondensators Z_C

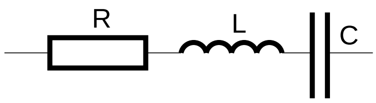
$$Z_C = \frac{-i}{\omega C}$$

2.3 Resonanz

Stimmen Erregerfrequenz ω und Eigenfrequenz ω_0 des Schwingkreises überein, so wird die Amplitude der Stromstärke I maximal, da der Widerstand minimal wird. Hierbei wird die Phasenverschiebung $\varphi = 0$, was wir später zur rechnerischen Bestimmung der Resonanzfrequenz nutzen werden.

3 Schwingkreise

3.1 Serienschwingkreis



Serienschwingkreis

Beim *Serienschwingkreis* werden ein Kondensator der Kapazität C, ein Ohmscher Widerstand R und eine Spule der Induktivität L in Reihe geschaltet. Für den Gesamtwiderstand Z gilt dann

$$Z = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}$$

also

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Mit Hilfe der Gaußschen Zahlenebene lässt sich leicht ablesen, dass für die Phasenverschiebung φ gilt

$$\tan\varphi = \frac{\Im Z}{\Re Z} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

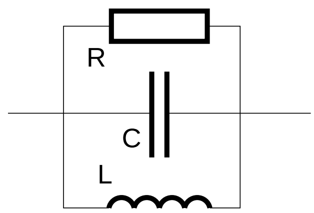
Wie oben erwähnt, ist die Bedingungen für die Resonanzfrequenz ω_0

$$\varphi(\omega) = 0$$

und damit

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

3.2 Parallelkreis 1.Ordnung



Parallelkreis 1. Ordnung

Beim *Parallelkreis 1.Ordnung* werden Spule, Kondensator und Widerstand zueinander parallel geschaltet. Es ist

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} - \frac{i}{\omega L} + i\omega C$$

und damit

$$|Y| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

bzw.

$$Z = \frac{1}{R(\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2)} - i\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}$$

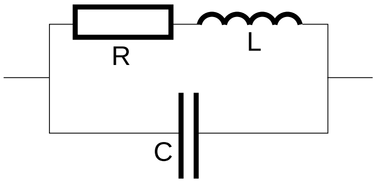
Für die Phasenverscheibung φ ergibt sich damit

$$\tan\varphi = -R(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

und als Resonanzfrequenz wieder

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

3.3 Parallelkreis 2.Ordnung



Parallelkreis 2. Ordnung

Bei einem *Parallelkreis 2.Ordnung* wird ein mit einer Spule in Reihe geschalteter Widerstand mit einem Kondensator parallel geschaltet. Es gilt dann

$$Y = i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L}$$

und somit

$$Z = \frac{k}{R + i(\omega Ck - \omega L)} = \frac{kR + i(\omega Lk - \omega Ck^2)}{R^2 + (\omega Ck - \omega L)^2}$$

wobei $k = R^2 + \omega^2 L^2$.
Weiterhin ist dann

$$\tan\varphi = \frac{\omega Lk - \omega Ck^2}{kR} = \frac{\omega}{R}(L - CR^2 + C\omega^2 L^2)$$

Bei der Bestimmung der Resonanzfrequenz findet man

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}$$

und daher

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

Mathematisch würden sich zwar noch eine Lösung mit negativem Vorzeichen und $\omega_0 = 0$ ergeben, beide Fälle sind jedoch physikalsich nicht sinnvoll bzw. für $\omega_0 = 0$ würden wir den Gleichstromfall betrachten.

4 Auswertung

4.1 Analog-Oszilloskop

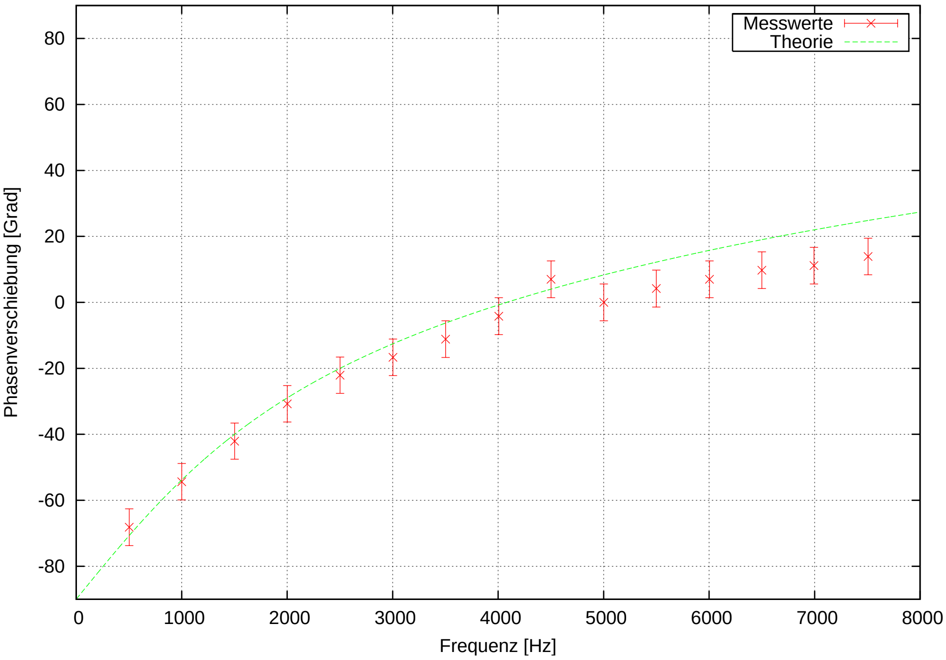
Mit dem Analogoszilloskop wurde ein Reihenschwingkreis vermessen. Hierbei wurden Bauteile mit den Werten $R = 21.93\mathrm{k}\Omega$ (Eigentlich wäre hier mit $1.5\mathrm{k}\Omega$ zu messen gewesen, nur da hat jemand geschlafen...), $L = 305.4\mathrm{mH}$ und $C = 4980\mathrm{pF}$ verwendet. Es die Lissajous Figur wurde in ein Quadrat eingepasst und dann Widerstand, große und kleine Halbachse so wie die Einstellungen des Oszilloskop notiert. Daraus lassen sich dann Impedanz und Phasenverschiebung (wobei das Vorzeichen der kleinen Halbachse aus der Theorie kommen muss) berechnen.
Wir gehen davon aus, das wir die Werte für a und b mit einer Genauigkeit von $1\mathrm{mm}$ ablesen konnten. Dann gilt für die Fehler:

$$\sigma_\varphi = \sqrt{\frac{4\sigma_{ab}^2}{a^2 + b^2}}$$

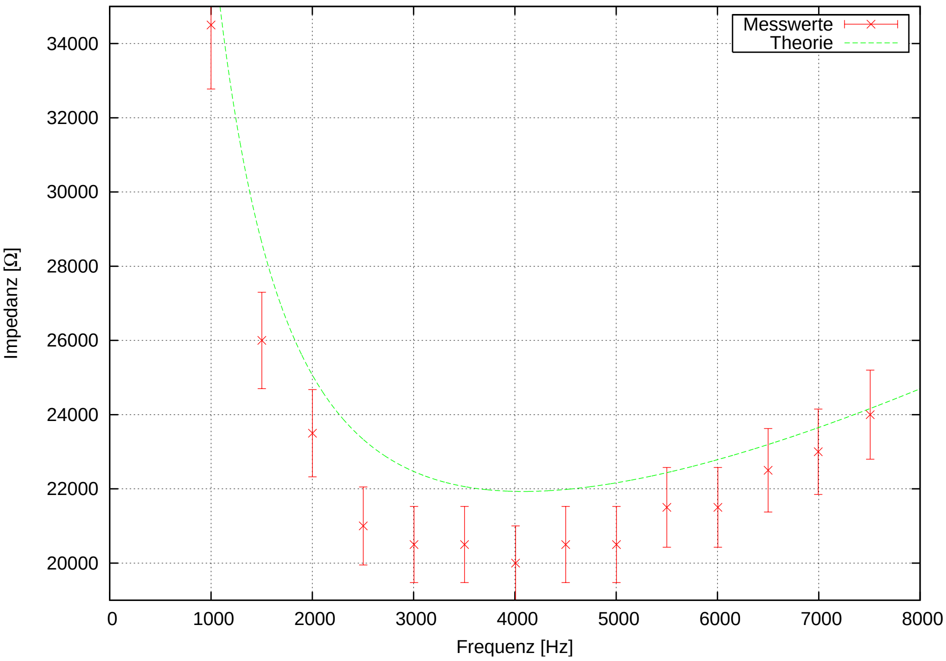
Für den systematischen Fehler der Bauteil soll 1% des Nennwertes angenommen werden. Da $|Z| = \frac{p_x X_0}{p_y Y_0} R$ gilt für den Fehler (da $X_0 = Y_0 = 30\mathrm{mm}$):

$$\Delta_Z = \frac{p_x}{p_y}\frac{R}{X_0}(2\Delta_s + 0.01X_0) = \frac{p_x}{p_y} R \cdot 0.5\mathrm{mm}$$

Phasenverschiebung

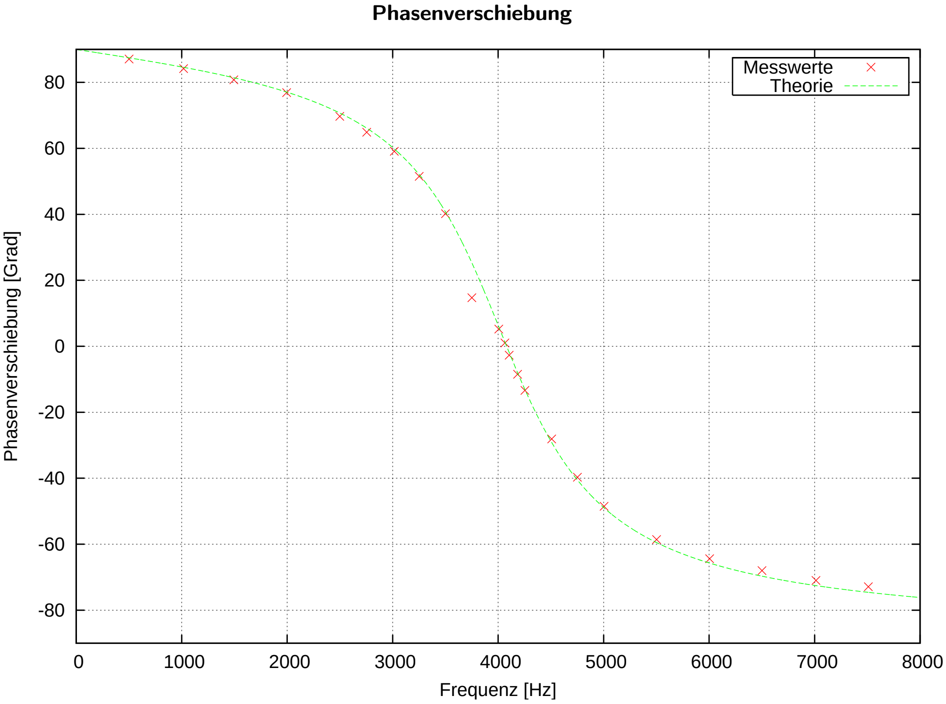


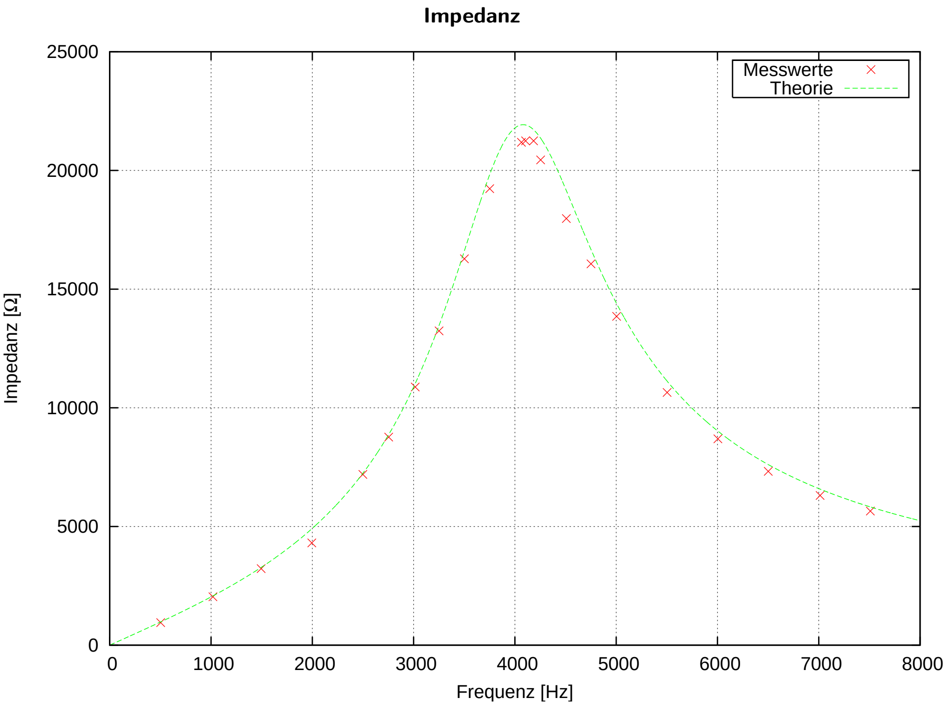
Impedanz



4.2 Digital-Oszilloskop

Mit dem Digitaloszilloskop wurde ein Parallelscjwingkreis 1. Ordnung vermessen. Hierbei wurden Bauteile mit den Werten $R = 21.93\mathrm{k}\Omega$, $L = 305.4\mathrm{mH}$ und $C = 4980\mathrm{pF}$ verwendet. Das Digitaloszilloskop ermöglicht direkt die Messung der Amplituden und Phasenverschiebung, so das die Messung relativ einfach und genau (bis auf einen Ausrutscher) von statten ging.

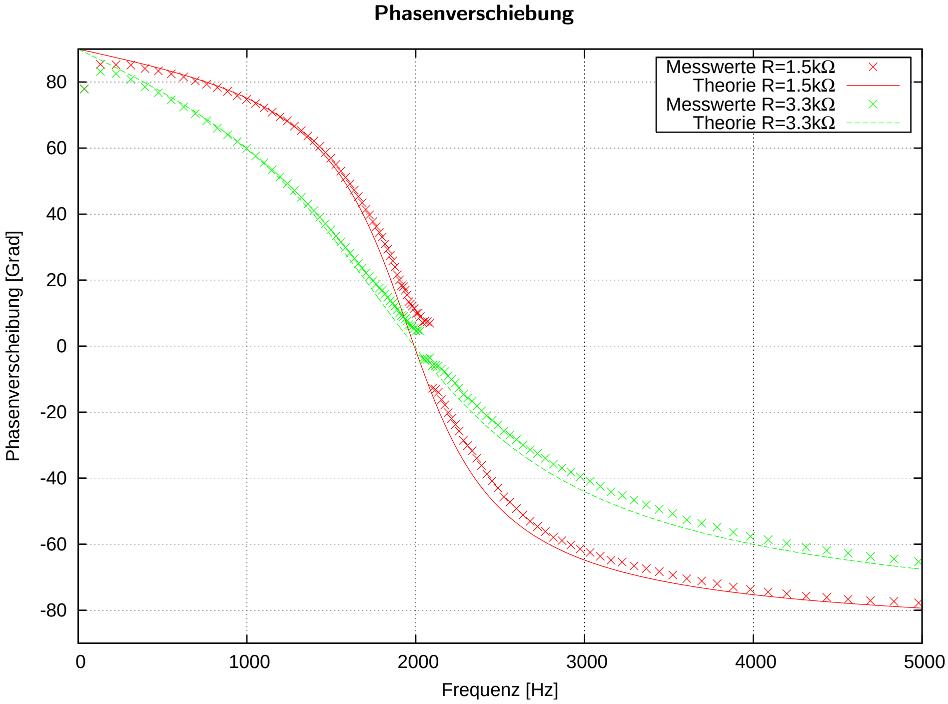


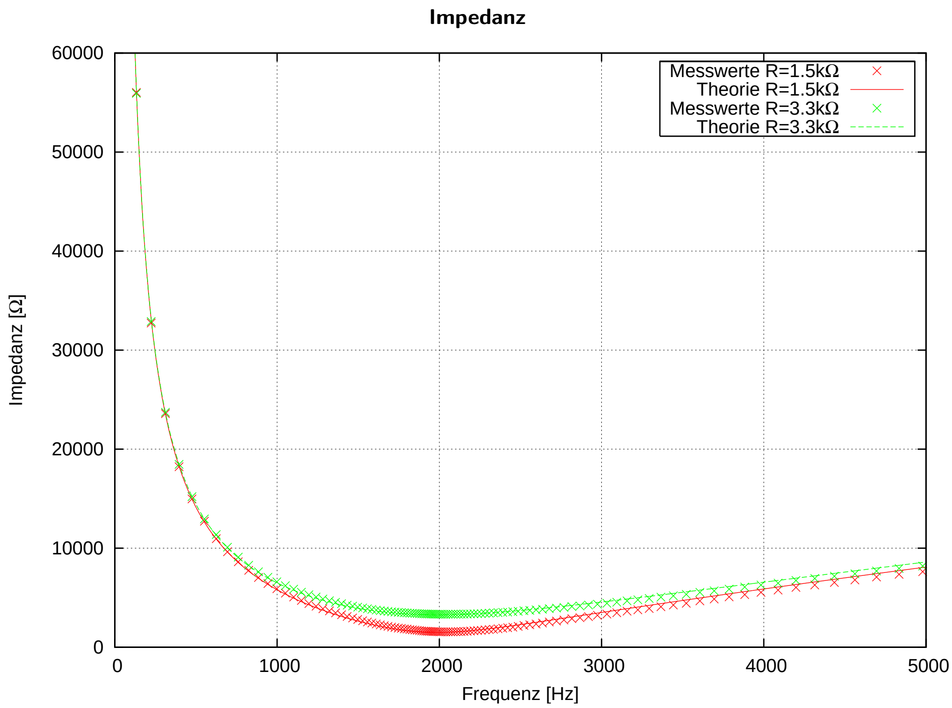


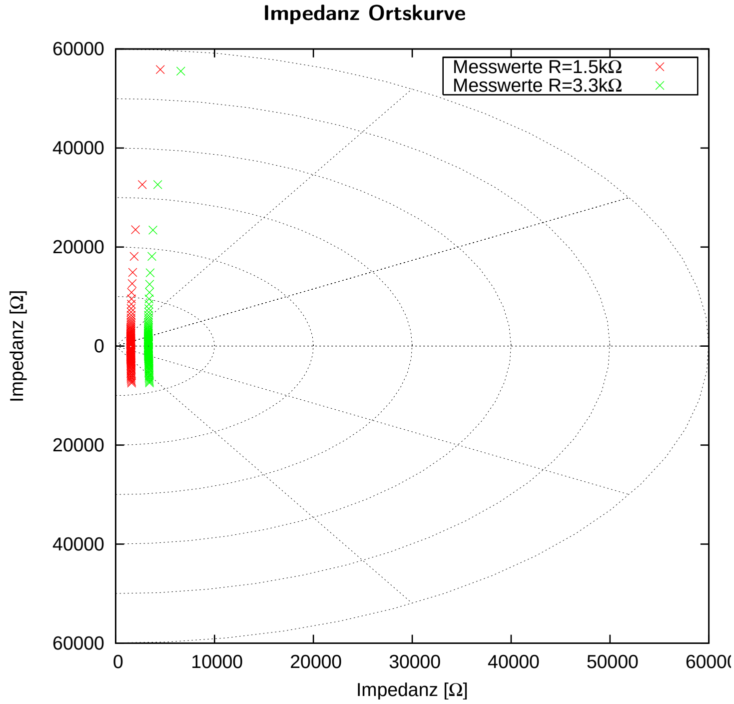
4.3 Cassy-Lab

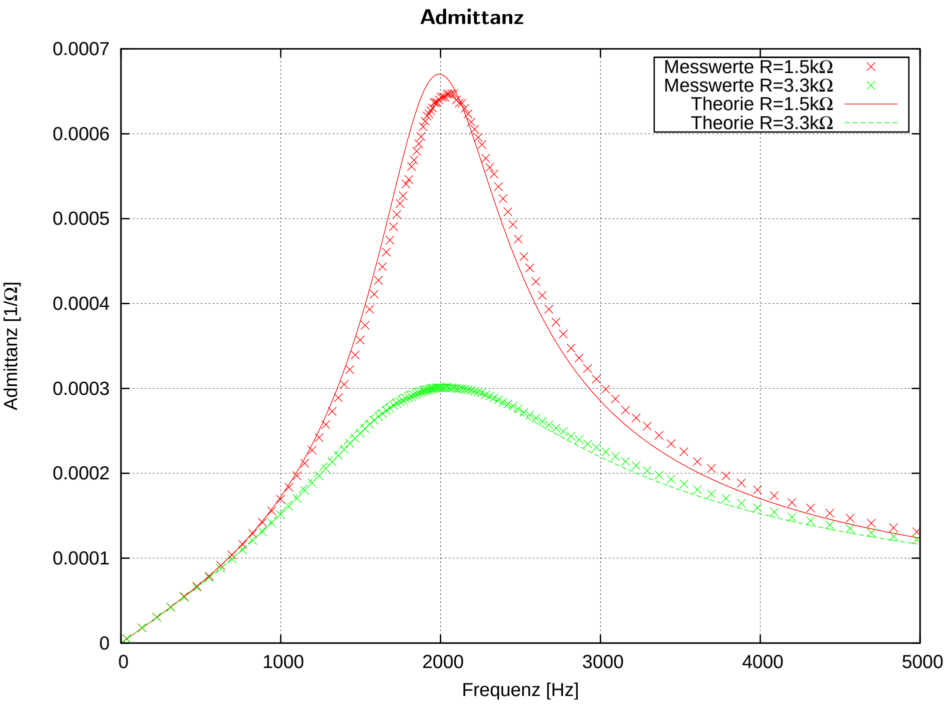
Mit Cassy-Lab wurden alle 3 Schaltungen mit je 2 Widerständen automatisch durchgemessen. Die Spule hatte den Wert $L = 300.9\mathrm{mH}$ und der Kondensator den Wert $C = 21.23\mathrm{nF}$.

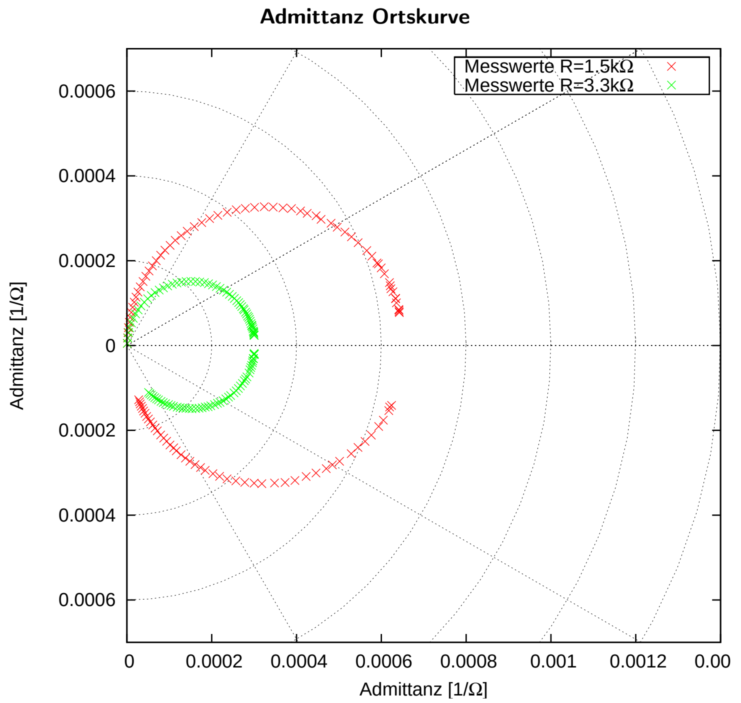
4.3.1 Reihenschaltung



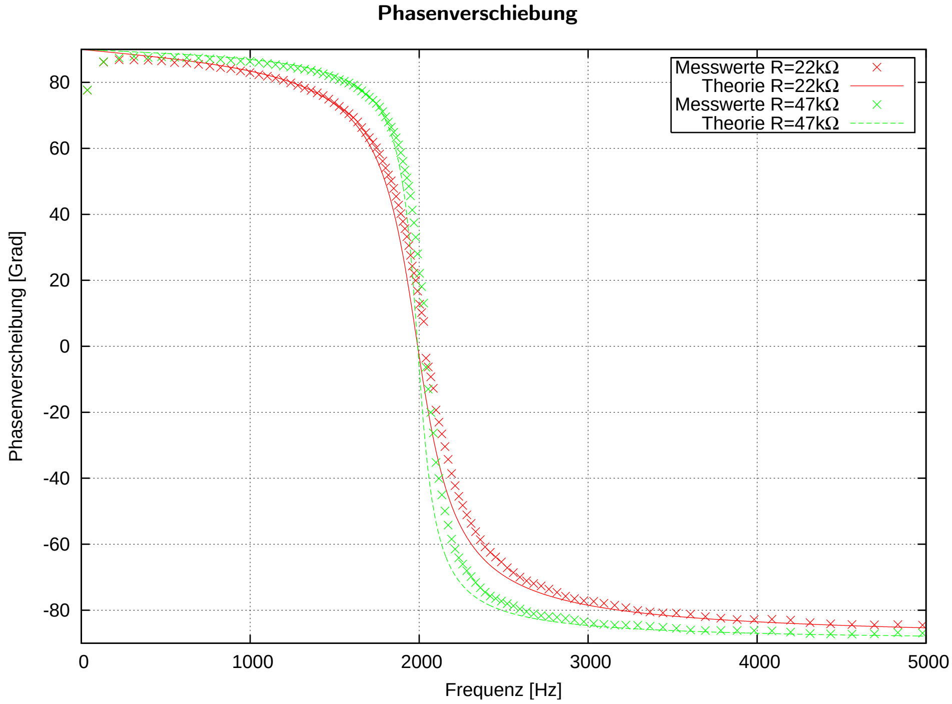

Impedanz
Messwerte R=1.5kΩ
Theorie R=1.5kΩ
Messwerte R=3.3kΩ
Theorie R=3.3kΩ
Impedanz [Ω]
Frequenz [Hz]
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000
0
1000
2000
3000
4000
5000

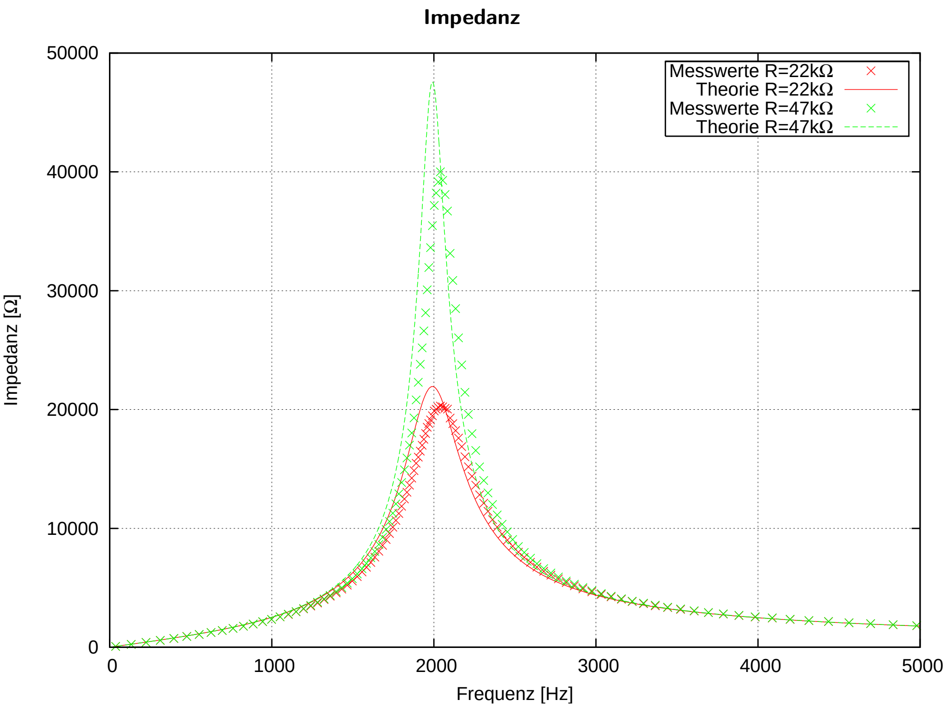

Impedanz Ortskurve
Messwerte R=1.5kΩ
Messwerte R=3.3kΩ
Impedanz [Ω]
Impedanz [Ω]
60000
40000
20000
0
20000
40000
60000
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000

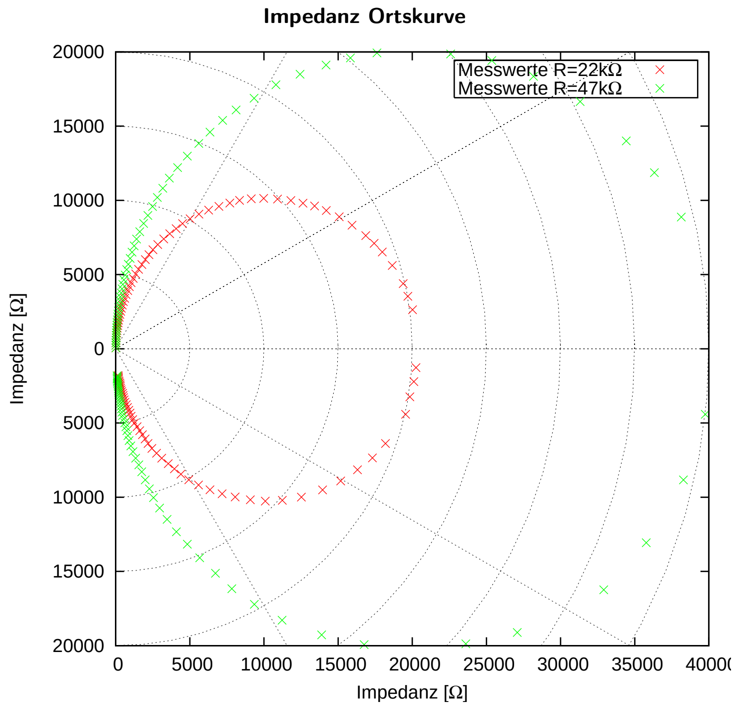

Admittanz
Messwerte R=1.5kΩ
Messwerte R=3.3kΩ
Theorie R=1.5kΩ
Theorie R=3.3kΩ
Admittanz [1/Ω]
Frequenz [Hz]
0.0007
0.0006
0.0005
0.0004
0.0003
0.0002
0.0001
0
0
1000
2000
3000
4000
5000

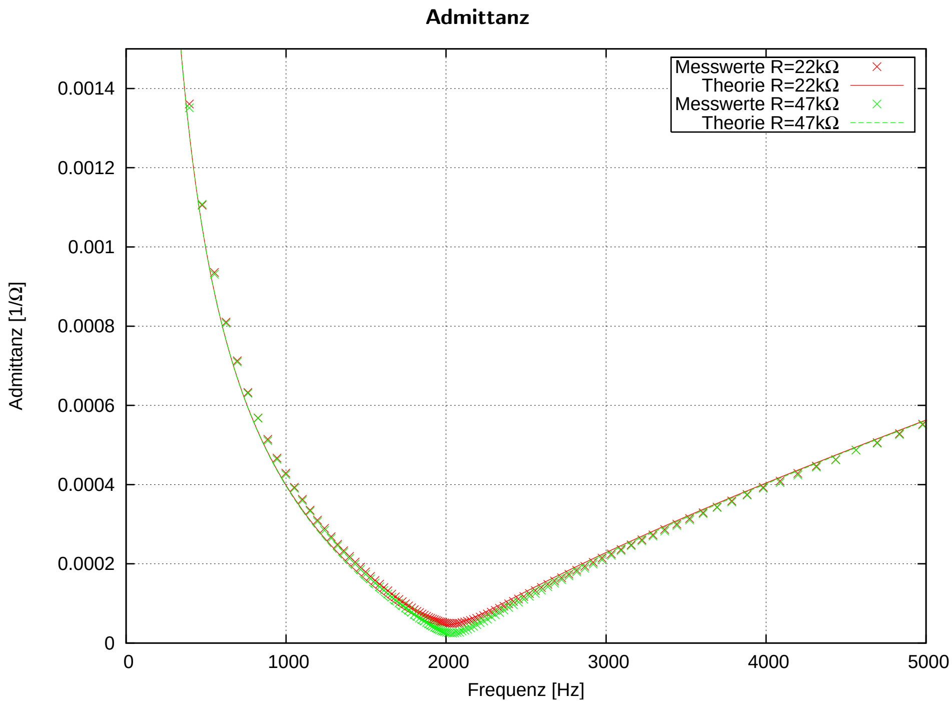

Admittanz Ortskurve
Messwerte R=1.5kΩ
Messwerte R=3.3kΩ
Admittanz [1/Ω]
Admittanz [1/Ω]
0.0006
0.0004
0.0002
0
0.0002
0.0004
0.0006
0
0.0002
0.0004
0.0006
0.0008
0.001
0.0012
0.00

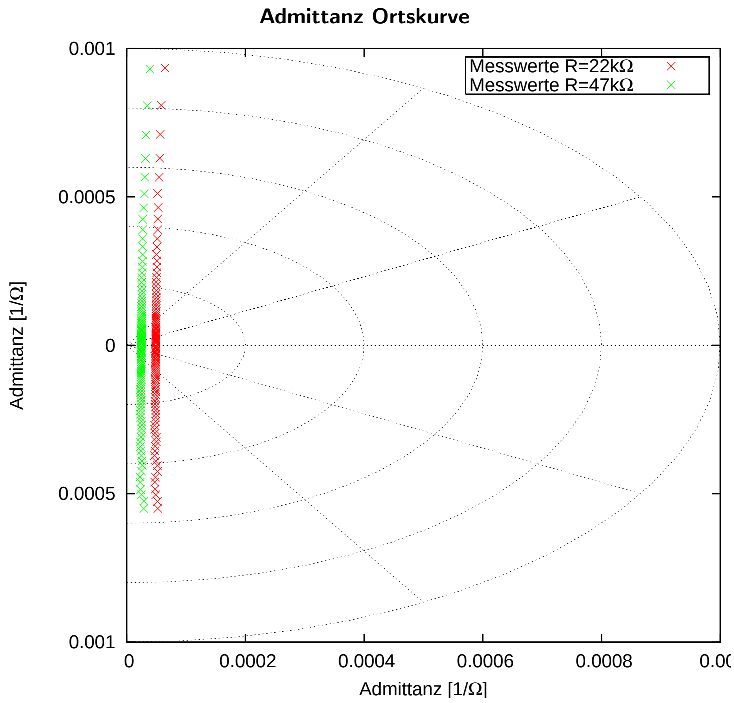
4.3.2 Parallelschaltung 1. Ordnung



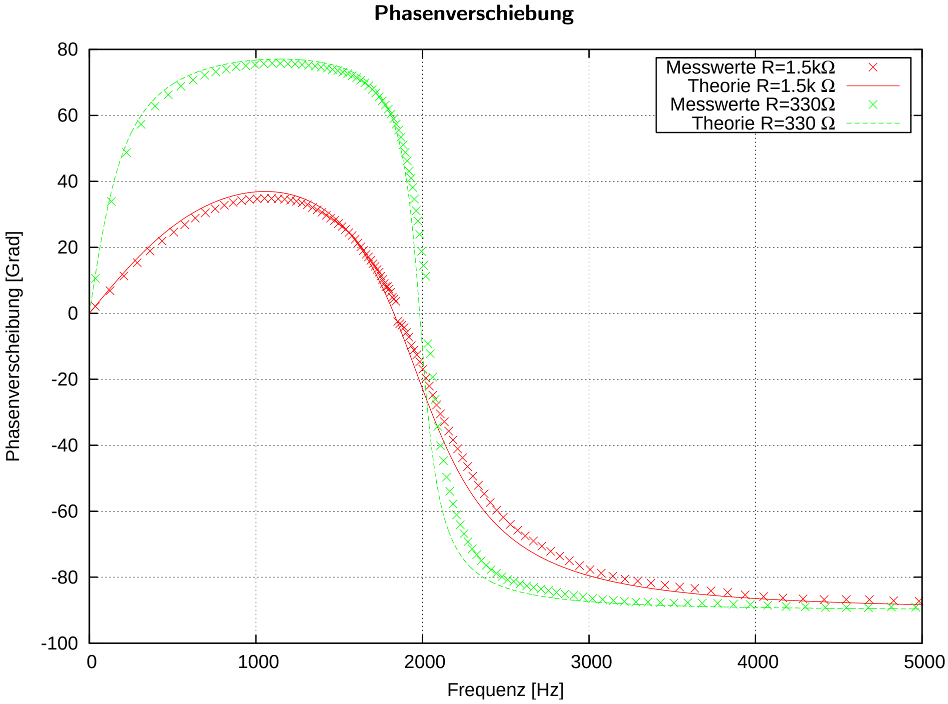

Impedanz
Messwerte R=22kΩ
Theorie R=22kΩ
Messwerte R=47kΩ
Theorie R=47kΩ
Impedanz [Ω]
Frequenz [Hz]
0
10000
20000
30000
40000
50000
0
1000
2000
3000
4000
5000

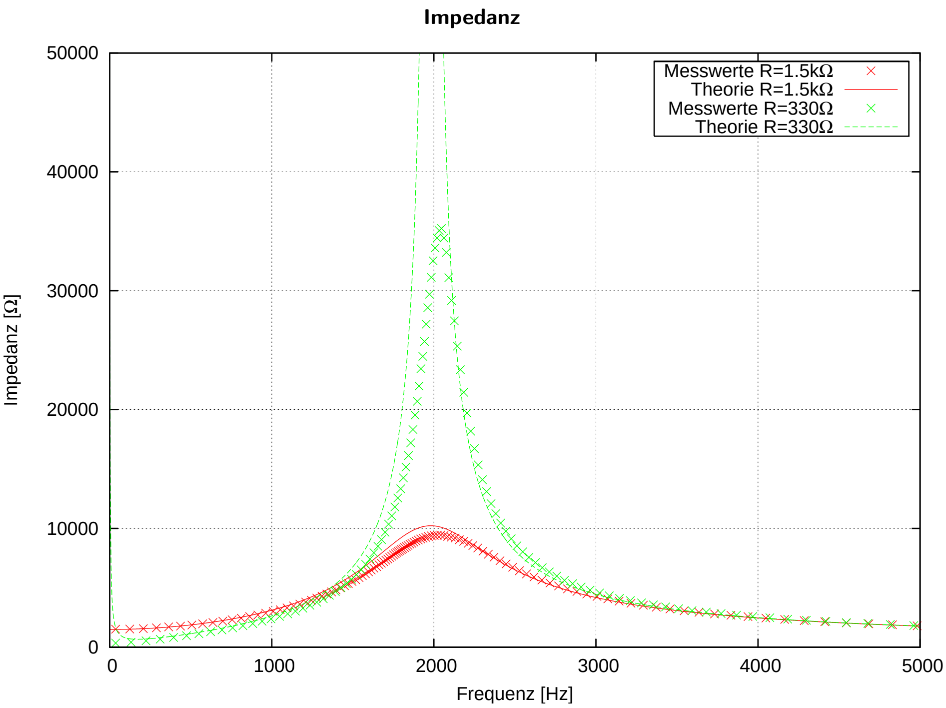

Impedanz Ortskurve
Messwerte R=22kΩ
Messwerte R=47kΩ
Impedanz [Ω]
Impedanz [Ω]
20000
15000
10000
5000
0
5000
10000
15000
20000
0
5000
10000
15000
20000
25000
30000
35000

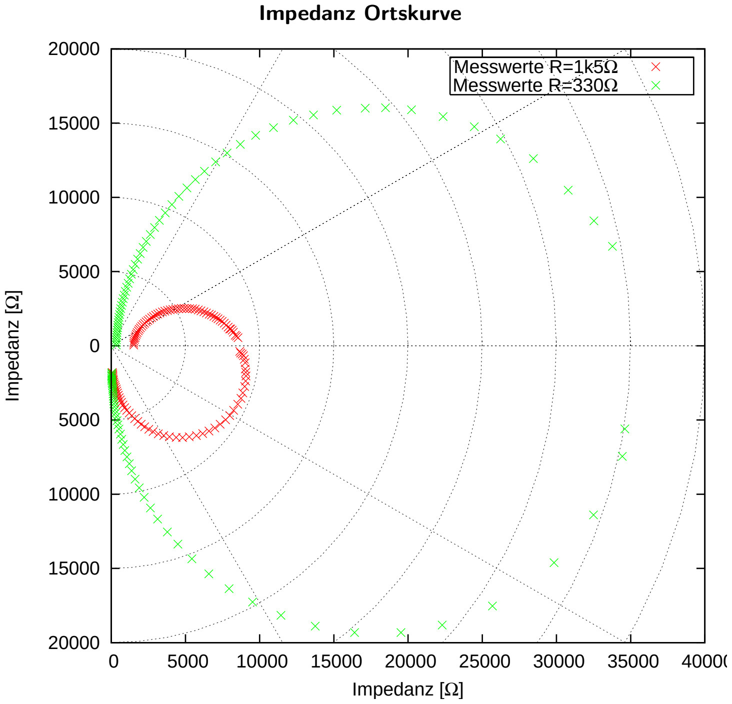

Admittanz
Messwerte R=22kΩ
Theorie R=22kΩ
Messwerte R=47kΩ
Theorie R=47kΩ
Admittanz [1/Ω]
Frequenz [Hz]
0.0014
0.0012
0.001
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0
1000
2000
3000
4000
5000

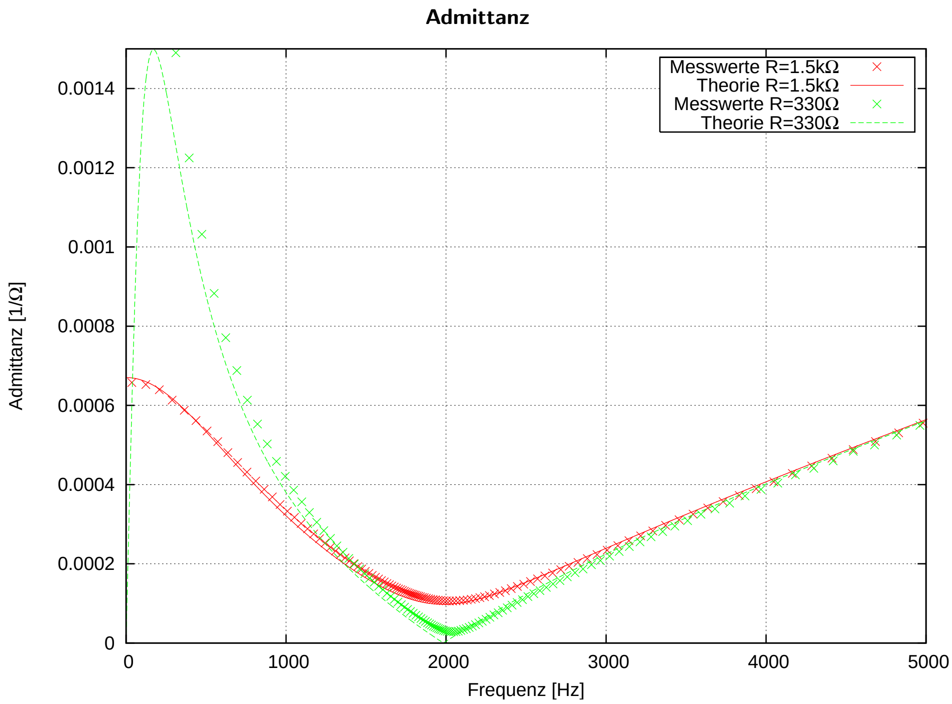

Admittanz Ortskurve
Messwerte R=22kΩ
Messwerte R=47kΩ
Admittanz [1/Ω]
Admittanz [1/Ω]
0.001
0.0005
0
0.0005
0.001
0
0.0002
0.0004
0.0006
0.0008

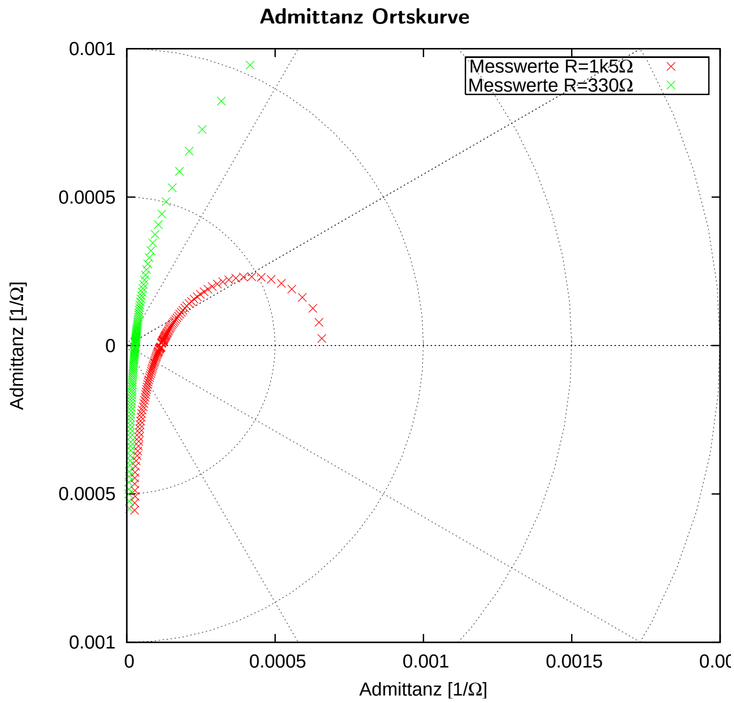
4.3.3 Parallelschaltung 2. Ordnung




Impedanz
Messwerte R=1.5kΩ
Theorie R=1.5kΩ
Messwerte R=330Ω
Theorie R=330Ω
Impedanz [Ω]
Frequenz [Hz]
0
10000
20000
30000
40000
50000
0
1000
2000
3000
4000
5000


Impedanz Ortskurve
Messwerte R=1k5Ω
Messwerte R=330Ω
Impedanz [Ω]
Impedanz [Ω]
20000
15000
10000
5000
0
5000
10000
15000
20000
0
5000
10000
15000
20000
25000
30000
35000
40000


Admittanz
Messwerte R=1.5kΩ
Theorie R=1.5kΩ
Messwerte R=330Ω
Theorie R=330Ω
Admittanz [1/Ω]
0.0014
0.0012
0.001
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
Frequenz [Hz]


Admittanz Ortskurve
Messwerte R=1k5Ω
Messwerte R=330Ω
Admittanz [1/Ω]
0.001
0.0005
0
0.0005
0.001
0
0.0005
0.001
0.0015
0.0(
Admittanz [1/Ω]