MR - Mechanische Resonanz
Blockpraktikum Herbst 2005

Alexander Seizinger, Tobias Müller
Assistent Florian Jessen

Tübingen, den 27. September 2005

1 Vorwort

In diesem Versuch ging es um die Messung von Resonanz eines zwischen zwei Federn eingespannten Luftkissengleiters, dessen Bewegung mit Magneten wirbelstromgebremst werden kann. Durch einen Motor kann an den Gleiter eine externe Kraft angelegt und mittels Lichtschranke und Maßband können Auslenkung und Periodendauer gemessen werden.

2 Theoretische Grundlagen

Im folgenden sei stets m die Masse des Gleiters, x die Auslenkung und t die Zeit, zudem betrachten wir stets einen idealisierten Fall und vernachlässigen Luftreibung, Federmasse, etc.

2.1 Harmonische Schwingung

Legt man ausserdem keine externe Kraft und keine Dämpfung durch die Magnete an, so ergibt sich folgende Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = -Dx \qquad \text{wobei } D \text{ die Federhärte ist}$$

Als Lösung dieser DGL erhält man

$$x(t) = x_0 \sin(\sqrt{\frac{D}{m}}\, t + \varphi_0) \qquad \text{wobei } \sqrt{\frac{D}{m}} = \omega_0 \text{ die Kreisfrequenz und } \varphi_0 \text{ die Phasenverschiebung ist}$$

2.2 Gedämpfte Schwingung

Im interessanteren Fall einer der Bewegung entgegenwirkenden Dämpfung ergibt sich unter der Annahme, dass die Dämpfung mit Faktor ηproportional zur Geschwindigkeit ist, folgende DGL:

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + Dx = 0$$

Zur weiteren Vereinfachung definieren wir die Güte Q als

$$Q := \frac{\sqrt{Dm}}{\eta}$$

Damit lässt sich die Bewegungsgleichung umschreiben zu

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

und mit dem Ansatz

$$x(t) = Ae^{\lambda t + \varphi_0}$$

wobei für das charakteristische Polynom gilt

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{(\frac{\omega_0}{Q})^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

und aus den Randbedingungen folgt

$$A = x_0$$

Es lassen sich nun drei Fälle unterscheiden:

a) $Q < \frac{1}{2}$: Kriechfall -> λ komplex, keine Schwingung

b) $Q = \frac{1}{2}$: Aperiodischer Grenzfall -> schnellste Rückkehr zur Ruhelage

c) $Q > \frac{1}{2}$: Schwingfall

Hier interessiert uns vor allem der Schwingfall mit $Q > \frac{1}{2}$, für die Bewegungsgleichung gilt dann

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t + \varphi_0)$$

Für die beobachtete Kreisfrequenz ω gilt dann

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Sei $t_2 = t_1 + T$ so gilt für das Verhältnis der Amplituden $x(t_1)$ und $x(t_2)$:

$$\frac{x(t_2)}{x(t_1)} = \frac{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t_1+T)}}{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t_1}} = e^{-\frac{T\omega_0}{2Q}}$$

und damit

$$\ln \frac{x(t_2)}{x(t_1)} = -\frac{T\omega_0}{2Q} = -\frac{\pi}{Q}$$

2.3 Erzwungene Schwingung

Bei der erzwungenen Schwingung wirkt eine äußere Kraft $F(t)$ auf den Gleiter, hier handelt es sich um eine periodische Kraft der Form

$$F(t) = F_0 \cos(\omega_E\ t + \varphi_0)$$

Für die Bewegungsgleichung gilt dann:

$$m\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_E\ t + \varphi_0)$$

Eine Lösung dieser Gleichung (Mathematica, Maple,...) wäre

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\omega_E t - \Phi(\omega_E))}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + \frac{\omega_0^2\omega_E^2}{Q^2}}} = \frac{F_0}{D\sqrt{(1 - \frac{\omega_E^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{\omega_E^2}{Q^2\omega_0^2}}} \cdot \cos(\omega_E t - \Phi(\omega_E))$$

wobei $\Phi(\omega_E)$ die Phasenverschiebung zwischen der Erregerschwingung und der erzwungen Schwingung ist und für die Amplitude A in Abhängigkeit von ω_E gilt:

$$A(\omega_E) = \frac{F_0}{D\sqrt{(1 - \frac{\omega_E^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{\omega_E^2}{Q^2\omega_0^2}}}$$

Durch Ableiten bestimmt man als Maximum der Amplitude die Resonanzfrequenz ω_R als

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

3 Bestimmung der Güte

Zusammenfassend ergeben sich drei verschiedene Methoden, die Güte zu bestimmen:

3.1 Eigenfrequenz

Falls die Eigenfrequenz und die Frequenz mit Dämpfung bekannt sind erhält man Q durch

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

3.2 Amplitudenabnahme

Durch das logarithmische Dekrement ergibt sich

$$\ln \frac{x(t_2)}{x(t_1)} = -\frac{\Pi}{Q}$$

3.3 Breite der Resonanz

Trägt man die Amplitude in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz ω_E in ein Diagramm ein, so ergibt sich nach einigen Näherungen die Güte als die relative Breite $\Delta\omega$ der Resonanzkurve im Abstand $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ von der Resonanzfrequenz ω_R entfernt.

$$Q \approx \frac{\omega_R}{\Delta\omega}$$

Aufgrund der verwendeten Näherungen gilt die nur für reltiv große Güten Q.

4 Auswertung

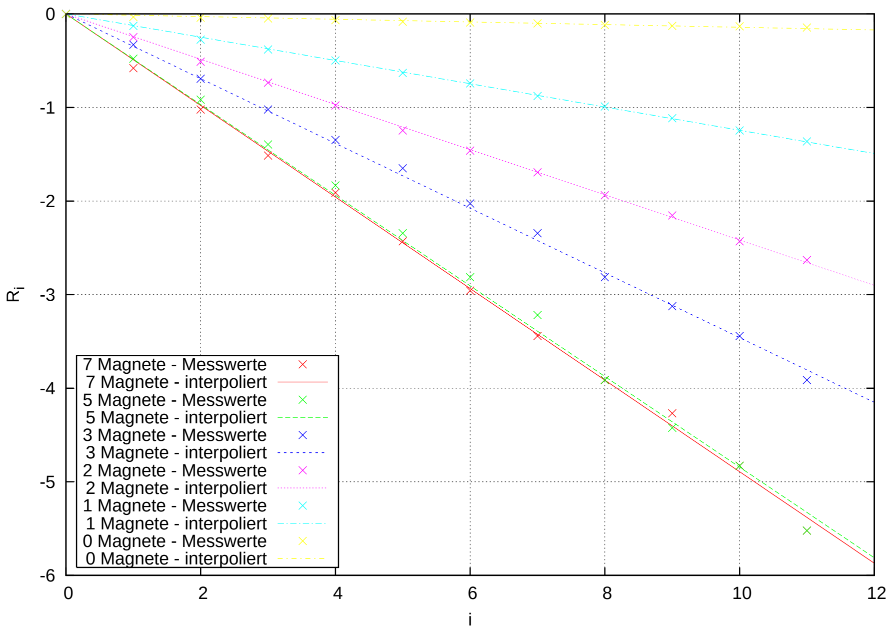
4.1 Kreisfrequenz bei unterschiedlicher Dämpfung

m	0	1	2	3	5	7
T [s]	3,132	3,133	3,133	3,135	3,134	
Q		19,79	19,79	11,43	14,00	

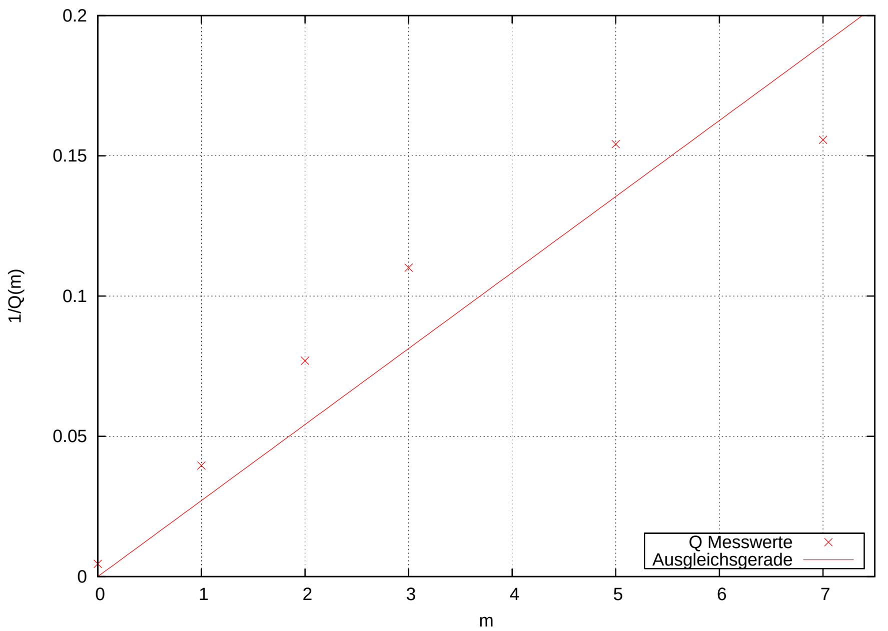
Die Auflösung des Periodendauermessgerätes erlaubt hier leider keine exakte Bestimmung der Güte.

4.2 Ermitteln der Güte mit Hilfe des logarithmischen Dekrements

Mit Hilfe der Steigungen der Geraden lassen sich die Güten der Federn (in Abhängigkeit der Anzahl der Magnete) ermitteln, wobei $Q = -\frac{\pi}{\text{Steigung}}$. Bei 2 Magneten erhalten wir so eine Güte von $Q = 13$.

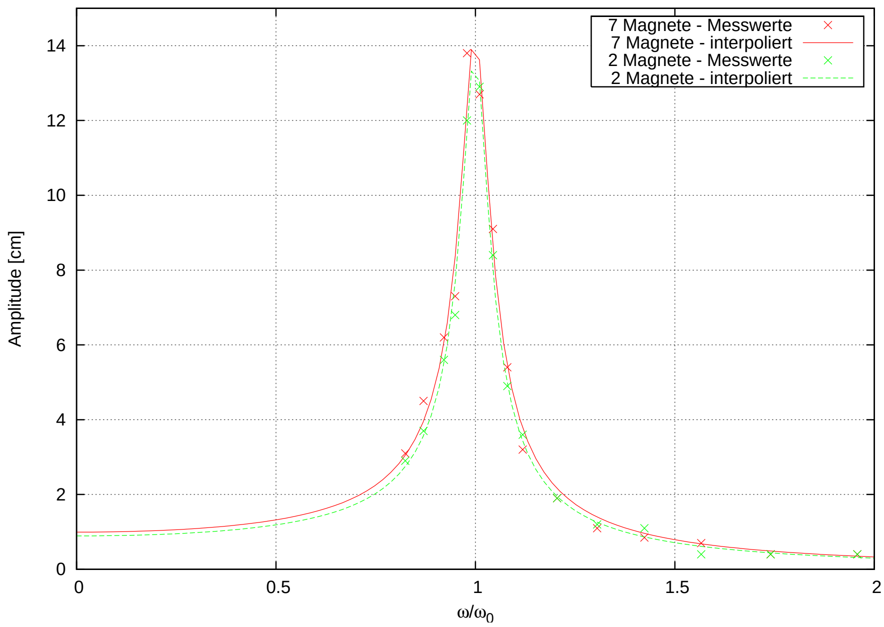


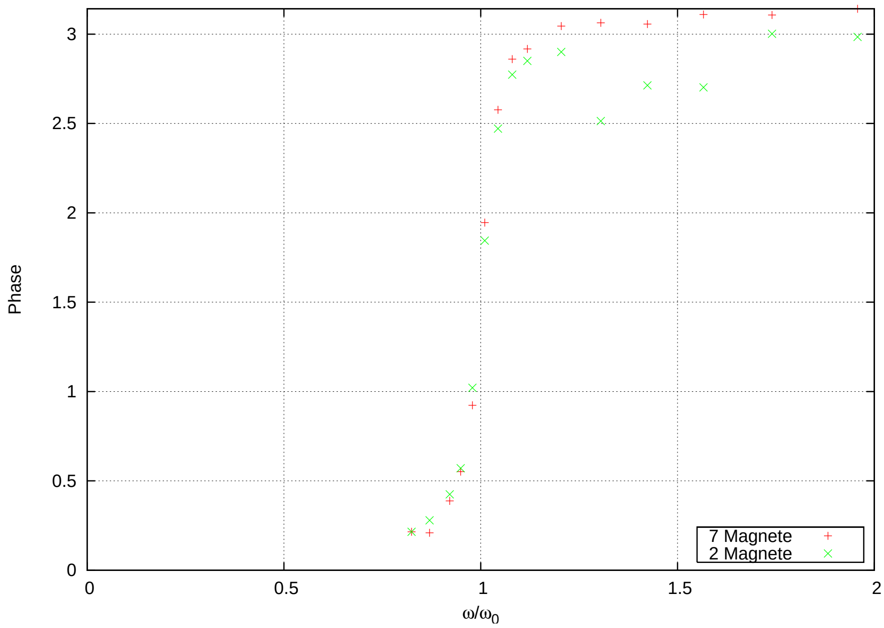
Im nachfolgenden Diagramm sind, die oben ermitteln, Güten reziprok aufgetragen.



Mit Hilfe der Ausgleichsgerade $Q(m) = 0,027 \cdot m$ läßt sich ermitteln, das für eine Güte von $Q = \frac{1}{2}$ (aperiodischer Grenzfall), $m_{krit} = 74$ Magneten erforderlich sind.

4.3 Resonanzkurven





Bei kleinen Dämpfungen (z.B. bei Magneten) kann man nun mit Hilfe der Breite der Resonanzkurve an den Stellen wo die Amplitude um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist die Güte erhalten.

Konkrekt: Das Maximum liegt bei einer Amplitude von $A_{max} = 13.82$. Da die Kurve bei $\frac{\omega}{\omega_0} = 0.966$ und $\frac{\omega}{\omega_0} = 1.031$ den Wert $\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ hat, gilt:

$$Q = \frac{\omega_0}{1.031 - 0.966} = 31$$

4.4 Vergleich

Die 3 Verfahren zur Bestimmung der Güte lassen sich nur begrenzt vergleichen, da im ersten Fall keine genau Messung möglich war und auch der letzte sehr unter der Ungenauigkeit der Extrapolation leidet. Daher sind wohl die mit Hilfe des logarithmischen Dekrements ermitteln Werte die Sinnvollsten.

4.5 Messdaten

4.5.1 Messung der Amplitude A bei verschiendenen Dämpfungen

i	m=7	m=5	m=3	m=2	m=1	m=0
1	25	25	25	25	25	25
2	14	15.5	18	19.5	22	24.2
3	9	10	12.5	15	19	24
4	5.5	6.2	9	12	17.1	23.4
5	3.7	4	6.5	9.4	15.2	23.4
6	2.2	2.4	4.8	7.2	13.3	23
7	1.3	1.5	3.3	5.8	11.9	22.8
8	0.8	1	2.4	4.6	10.4	22.6
9	0.5	0.5	1.5	3.6	9.3	22.2
10	0.35	0.3	1.1	2.9	8.2	22
11	0.2	0.2	0.8	2.2	7.2	21.9
12	0.1	0.1	0.5	1.8	6.4	21.6

4.5.2 Messung der Amplitude A und Phasenverschiebung Φ bei verschiedenen Erregerfrequenzen

Zeit [s]	A (m=7)	A (m=2)	Φ (m=7)	Φ (m=2)
1.2	0.3	0.3	0.63	0.7
1.4	0.4	0.3	0.76	0.72
1.6	0.4	0.4	0.8	0.76
1.8	0.4	0.4	0.89	0.86
2	0.7	0.4	0.99	0.86
2.2	0.85	1.1	1.07	0.95
2.4	1.1	1.2	1.17	0.96
2.6	1.9	1.9	1.26	1.2
2.8	3.2	3.6	1.3	1.27
2.9	5.4	4.9	1.32	1.28
3	9.1	8.4	1.23	1.18
3.1	12.7	12.9	0.96	0.91
3.2	13.8	12	0.47	0.52
3.3	7.3	6.8	0.29	0.3
3.4	6.2	5.6	0.21	0.23
3.6	4.5	3.7	0.12	0.16
3.8	3.1	2.9	0.13	0.13