EF - Elektronen im elektrischen und magnetischen Feld
Blockpraktikum - Herbst 2005

Tobias Müller, Alexander Seizinger
Assistent: Waldemar Kaiser

Tübingen, den 23. Oktober 2005

1 Vorwort

In diesem Versuch untersuchten wir das Verhalten von Elektronen in elektrischen und magnetischen Feldern.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Elektronen im $\vec{E}$-Feld

Durchlaufen Elektronen ein $\vec{E}$-Feld der Feldstärke $\vec{E}$, so erfahren sie die Kraft $\vec{F}$

$$\vec{F} = e\vec{E}$$

wobei e die Elementarladung eines Elektrons ist und $\vec{F}$ in Richtung der von $-$ nach $+$ verlaufenden Feldlinien zeigt.

2.2 Elektronen im Plattenkondensator

In einem Plattenkondensator mit Plattenabstand d befindet ein zur angelegten Kondensatorspannung U_C proportionales, homogenes $\vec{E}$-Feld der Feldstärke E

$$E = \frac{U_C}{d}$$

Ein parallel zu den Platten eingeschossenes Elektron erfährt daher eine konstante Kraft F

$$F = e\frac{U_C}{d}$$

zur positiven Platte hin. Nach Newton gilt für die Ablenkung in vertikaler Richtung (y-Achse) dann

$$e\frac{U_C}{d} = m_e\ddot{y}$$

wobei m_e die Masse eines Elektrons ist, und somit

$$y(t) = \frac{1}{2}\frac{eU_C}{dm_e}t^2 \tag{1}$$

Da sich die parallele Geschwindigkeitskomponente nicht ändert gilt für die Bewegung in x-Richtung

$$x(t) = v_e t = \sqrt{\frac{2eU_B}{m_e}} \cdot t \tag{2}$$

wobei U_B die angelegte Beschleunigungsspannung ist.
Mit Hilfe von Gleichung 2 lässt sich aus Gleichung 1 die Abhängigkeit von der vertikalen Ablenkung Δy von der durchflogenen Strecke x berechnen als

$$\Delta y = \frac{U_C}{4dU_B}x^2 \tag{3}$$

2.3 Elektronen im $\vec{B}$-Feld

Durchlaufen Elektronen der mit der Geschwindigkeit v_e ein Magnetfeld der Stärke B so erfahren sie die Lorentzkraft F_L

$$\vec{F_L} = e\vec{v_e} \times \vec{B}$$

Diese wirkt also immer senkrecht zur Bewegungsrichtung und zwingt die Elekronen somit auf eine Kreis- bzw. Schraubenbahn. Da die Lorentzkraft als Zentripetalkraft wirkt gilt für den Radius r der Bahnen

$$ev_eB = \frac{m_e v_e^2}{r}$$

also lässt sich das Verhältnis $\frac{e}{m_e}$ leicht bestimmen durch

$$\frac{e}{m_e} = \frac{v_e}{Br} \tag{4}$$

Man stellt fest, dass die Umlaufzeit T unabhängig vom Bahnradius ist und sich über $\omega = 2\Pi f$ und $\omega r = v_e$ berechnet durch

$$T = \frac{2\Pi r}{v_e} \tag{5}$$

2.4 Feld eines Helmholtzspulenpaares

Das Magnetfeld einer Spule läßt sich mit dem Gesetz von Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

auf der Symmetrieachse z leicht berechnen. Für $\vec{r}$ gilt hier (in Zylinderkoordinaten) $d\vec{l} = Rd\varphi\hat{e}_\varphi$ und $\vec{r} = -R\hat{e}_r + \left(z + \frac{a}{2}\right)\hat{e}_z$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\vec{B}(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{n\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\varphi\hat{e}_\varphi \times \left[\left(\frac{a}{2}+z\right)\hat{e}_z - R\hat{e}_r\right]}{\sqrt{R^2 + \left(z+\frac{a}{2}\right)^2}^3} = \int_0^{2\pi} \frac{n\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\varphi\left(\frac{a}{2}+z\right)\hat{e}_r + IR^2 d\varphi\hat{e}_z}{\sqrt{R^2 + \left(z+\frac{a}{2}\right)^2}^3} \\ &= \frac{n\mu_0}{2} \frac{IR^2\hat{e}_z}{\sqrt{R^2 + \left(z+\frac{a}{2}\right)^2}^3}\end{aligned}$$

Das Feld beider Spulen entsteht dann durch Superposition:

$$\vec{B}(z) = \frac{IR^2 n\mu_0}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(z+\frac{a}{2}\right)^2}^3} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(z-\frac{a}{2}\right)^2}^3}\right]\hat{e}_z$$

2.5 Alternative Möglichkeit der $\frac{e}{m}$-Bestimmung

Bei einer *magnetischen Linse* nutzt man die fokussierende Wirkung von homogenen Magnetfelder auf Elektronenstrahlen. DIese lassen sich z.B durch Helmholtzspulenpaare erzeugen. Nach Gleichung 5 ist

$$T = \frac{2\Pi r}{v_e} = \frac{2\Pi m_e}{eB}$$

In der Zeit T durchläuft das Elektron der Geschwindigkeit $v_x = \sqrt{\frac{2eU_B}{m_e}}$ eine gewisse Strecke x, durch Gleichsetzten und Auflösen nach $\frac{e}{m_e}$ erhält man dann

$$\frac{e}{m_e} = \frac{8\Pi^2 U_B}{x^2 B^2}$$

Durch Ersetzen von B erhält man schließlich für eine Spule mit n Windungen und Länge L

$$\frac{e}{m_e} = \frac{8\Pi e U_B L^2}{x^2\mu_0^2 n^2 I^2} \tag{6}$$

wobei I den durch die Spule fliessenden Strom bezeichnet.

3 Auswertung

3.1 Elektrostatische Ablenkung

Die Parabel wurde bei 2 verschiendenen Beschleuigungspannung U_0 bei jeweils 2 Kondensatorspannung U_p vermessen. Da jeweils Punkte (x, y) gemessen wurden, sagt die Konstanz des Quotienten $\frac{y}{x^2}$ etwas über die Genauigkeit der Parabelform aus. Wir erhalten mit unseren Messwerten:

U_0 [V]	U_p [V]	$\frac{y}{x^2}$ [$^1/_{\mathrm{cm}}$]	Theorie [$^1/_{\mathrm{cm}}$]
2070	960	0.0108 ± 0.0014	0.0215
2070	1974	0.0189 ± 0.0019	0.0441
3111	2958	0.0191 ± 0.0018	0.0440
3111	5154	0.0309 ± 0.0099	0.0767

Die großen Abweichungen sind sicher auf die ungenaue Ablesemöglichkeit mit zurückzuführen. Allerdings legen die Werte auffällig um den Faktor $\frac{1}{2}$ daneben, so dass wir einen eventuellen systematischen Fehler nicht berücksichtigt haben.

Nimmt man Ionen statt Elektronen oder Änderung U_0 und U_p im gleichen Verhältnis ändert das nichts an der Laufbahn.

3.2 Magnetische Ablenkung

Um den Kreisradius der Bahn zu bestimmen wurden 2 Messpunkte (x, y) aufgenommen, hier gehen wir von einem Fehler von $1\mathrm{mm}$ aus. Der Strom I gibt Auskunft über die Stärke des Magnetfeldes und wurden mit einem Fehler von 2% abgeschätzt. Die Spannung U_0 wurde wieder mit einem Strommessgerät gemessen und dann mit Hilfe des Innenwiderstandes von $60\mathrm{M\Omega}$ ausgrechnet. Auch hier soll ein Fehler von 2% angenommen werden. Damit erhalten wir mit unseren Messwerte:

U_0 [V]	I [A]	x [m]	y [m]	r [m]	B [mT]	$\frac{e}{m}$ [10^{10} $^{\mathrm{C}}/_{\mathrm{kg}}$]
1971	0.210	0.08	−0.011	0.30 ± 0.03	0.89 ± 0.02	5.68 ± 1.06
1971	0.210	0.05	−0.005	0.25 ± 0.05	0.89 ± 0.02	7.83 ± 3.15
1971	−0.213	0.08	0.009	0.36 ± 0.04	0.90 ± 0.02	3.74 ± 0.85
1971	−0.213	0.06	0.006	0.30 ± 0.05	0.90 ± 0.02	5.29 ± 1.78
1971	0.307	0.04	−0.0035	0.23 ± 0.07	1.30 ± 0.03	4.40 ± 2.52
1971	0.307	0.08	−0.015	0.22 ± 0.01	1.30 ± 0.03	4.79 ± 0.67
1971	−0.301	0.04	0.005	0.16 ± 0.03	1.27 ± 0.03	9.20 ± 3.70
1971	−0.301	0.07	0.011	0.23 ± 0.02	1.27 ± 0.03	4.67 ± 0.87
4014	0.302	0.10	−0.016	0.32 ± 0.02	1.28 ± 0.03	4.79 ± 0.64
4014	0.302	0.07	−0.0065	0.28 ± 0.04	1.28 ± 0.03	6.26 ± 1.95
4014	−0.300	0.05	0.005	0.25 ± 0.05	1.27 ± 0.03	7.81 ± 3.15
4014	−0.300	0.09	0.011	0.37 ± 0.03	1.27 ± 0.03	3.57 ± 0.67
4014	0.416	0.04	−0.0035	0.23 ± 0.07	1.76 ± 0.04	4.88 ± 2.80
4014	0.416	0.06	−0.008	0.23 ± 0.03	1.76 ± 0.04	4.94 ± 1.25
4014	−0.401	0.05	0.0065	0.20 ± 0.03	1.70 ± 0.03	7.29 ± 2.27
4014	−0.401	0.07	0.010	0.25 ± 0.03	1.70 ± 0.03	4.46 ± 0.91

Wobei für die Fehler folgende Formeln verwendet wurden (Gaußsche Fehlerfortpflanzung):

$$\sigma_B = \sqrt{\left(\mu 0 \frac{8n}{5\sqrt{5}} \frac{\sigma_i}{R}\right)^2}$$

$$\sigma_r = \sqrt{\left(\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2y^2}\right)\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\sigma_y\right)^2}$$

$$\sigma_{\frac{e}{m}} = \sqrt{\left(\frac{2}{B^2 r^2}\sigma_U\right)^2 + \left(\frac{4U_0}{B^3 r^2}\sigma_B\right)^2 + \left(\frac{4U_0}{B^2 r^3}\sigma_r\right)^2}$$

Mitteln wir über alle oben erhaltenen Messwerte erhalten wir

$$\frac{e}{m} = 5.601 \cdot 10^{10} \, ^{\mathrm{C}}/_{\mathrm{kg}}$$

was etwa um den Faktor 3 vom Literaturwert $1.76 \cdot 10^{10} \, ^{\mathrm{C}}/_{\mathrm{kg}}$ abweicht. Wie auch oben ist dies sicherlich auf die ungenaue Ablesemöglichkeit der Punkte mit zurückzuführen.

3.3 Magnetische Linse

Mit unseren Messwerte erhalten wir mit Hilfe des PC-Programmes zur Auswertung des Versuches einen Messwerte von

$$\frac{e}{m} = 1.6713712 \cdot 10^{11} \, ^{\mathrm{C}}/_{\mathrm{kg}}$$

mit einer externen Standardabweichung von $8.833518 \cdot 10^{8} \, ^{\mathrm{C}}/_{\mathrm{kg}}$ und einer internen Standardabweichung von $1.8691456 \cdot 10^{9} \, ^{\mathrm{C}}/_{\mathrm{kg}}$. Dieser Wert liegt, dank der viel besseren Ablesemöglichkeit, sehr gut beim Literaturwert von $1.76 \cdot 10^{10} \, ^{\mathrm{C}}/_{\mathrm{kg}}$.