AG - Auflösungsvermögen von Prisma und Gitter
Blockpraktikum Herbst 2005

Alexander Seizinger, Tobias Müller
Assistent Florian Jessen

Tübingen, den 30. September 2005

1 Vorwort

In diesem Versuch ging es um die Messung des Auflösungsvermögens von Prisma und Gitter.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Auflösungsvermögen Gitter

Zwei Lichtpunkte können vom Beobachter gerade noch getrennt wahrgenommen werden, wenn das Hauptmaximum des zweiten in das erste Minimum des ersten Lichtpunktes fällt.
Sei $I(\alpha)$ die Intensität unter einem Beugungswinkel α, dann ist

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2(\frac{N\pi g}{\lambda}\sin\alpha)}{\sin^2(\frac{\pi g}{\lambda}\sin\alpha)}$$

wobei g die Gitterkonstante und N die Anzahl der beleuchteten Spalte ist. Aus der vorhergehenden Forderung folgt direkt die Bedingung

$$\frac{N\pi g}{\lambda}\,\Delta\sin\alpha = \pi \tag{1}$$

wobei $\Delta\sin\alpha = \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1$ und mit Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung folgt

$$\Delta\sin\alpha = \cos\alpha_1 \cdot \Delta\alpha$$

und damit aus Gleichung (1)

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda}{Ng\cos\alpha} \tag{2}$$

folgt. Aus

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = \frac{k}{g}\cos\alpha$$

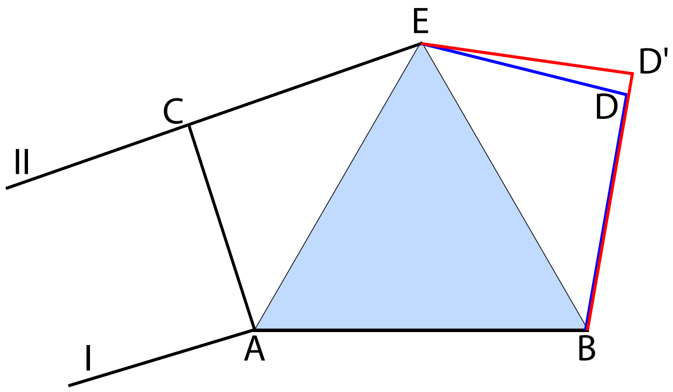
und Gleichung 2 folgt mit $\frac{d\lambda}{d\alpha} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\alpha}$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{Ngk\cos\alpha}{g\cos\alpha} = kN$$

Ersetzen wir k durch $\frac{g\sin\alpha}{\lambda}$ so folgt mit $B = \frac{Ng}{\cos\alpha}$:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{B}{\lambda}\tan\alpha$$

2.2 Auflösungsvermögen Prisma



Nach dem Fermatschen Prinzip schlägt Licht stets den zeitlich kürzesten Weg ein. Betrachtet man nun die beiden Randstrahlen I und II, so muss für deren optische Wege OW gelten

$$OW(\lambda, I) = \overline{BE} + \overline{ED} = OW(\lambda, II) = \overline{AC} \cdot n_\lambda = bn_\lambda$$

Für einen Strahl mit Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$

$$OW(\lambda + \Delta\lambda, I) \approx \overline{BE} + \overline{ED} + \overline{DD'}$$

$$OW(\lambda + \Delta\lambda, II) = b \cdot n_{\lambda+\Delta\lambda}$$

Für $n_{\lambda+\Delta\lambda}$ gilt

$$n_{\lambda+\Delta\lambda} = n_\lambda + \frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda$$

also ist

$$bn_{\lambda+\Delta\lambda} = bn_\lambda + b\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda = \overline{BE} + \overline{ED} + \overline{DD'}$$

und somit

$$b\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda = \overline{DD'}$$

wobei aufgrund des vorgeschalteten Einzelspalts $\overline{DD'} = \lambda$ und deshalb

$$b\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda = \lambda$$

Nützt man weiterhin für den Winkel ϵ zwischen zwei Strahlen verschiedener Wellenlänge die Kleinwinkelnäherung $\sin\varphi \approx \varphi$ so erhält man

$$\epsilon = \sin\epsilon = \frac{\lambda}{B}$$

wobei B die Spaltbreite darstellt. Durch Substitution von λ durch obigen Ausdruck erhält man

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = B\frac{\epsilon}{\Delta\lambda} \tag{3}$$

3 Versuchsdurchführung

Das Licht einer Quecksilberlampe wurde durch eine Spalt auf ein Prisma/Gitter geworfen und anschliessend mit einem Fernrohr das Beugungsmuster vermessen. Die Spalte sind notwendig, da sonst im nicht koheränten Licht der Lampe durch die vielen verschiedenen Wellenlängen kein scharfes Bild hätte beobachtet werden können.

4 Auswertung

4.1 Prisma

Die gemessenen Winkel für die Spektrallinien der Hg-Lampe betragen:

$$\alpha_{Gelb} = (292.02 \pm 0.07)^\circ \qquad \alpha_{Gruen} = (291.80 \pm 0.08)^\circ$$

Damit läßt sich nun die Winkeldifferenz zwischen den beiden gelben Spektrallinien berechenen:

$$\alpha = \frac{579.1\text{nm} - 577\text{nm}}{579.1\text{nm} - 546.3\text{nm}}(\alpha_{Gelb} - \alpha_{Gruen}) = (0.22 \pm 0.11)^\circ$$

Um die Spaltbreite zu ermitteln, wurde die Milimeterschraube auf 0 geeichet. Der Nullpunkt wurde zu $N = (0.6 \pm 0.06)\text{mm}$ geeicht. Für die Breite des Spaltes haben wir gemessen:

$$B_{trennbar} = (3.20 \pm 0.16)\text{mm} \qquad B_{nichttrennbar} = (2.72 \pm 0.17)\text{mm}$$

Damit erhalten wir für die Spaltbreite

$$B = \frac{B_{trennbar} + B_{nichttrennbar}}{2} - N = (2.36 \pm 0.13)\text{mm}$$

Damit läßt sich jetzt die Auflösung des Prismas berechnen. Es gilt:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = B\frac{\alpha}{\Delta\lambda} = 276.57 \pm 140.04$$

Der sehr große Fehler dabei, läßt sich auf die ungenaue Winkelmessung zurückführen. Der Fehler von dort (ca. 50% Fehler bei der Winkeldifferenz) pflanzt sich durch das Gaußsche Fehlerfortplanzungsgesetz bis in Auflösung durch. Der Wert trifft aber trotzdem sehr gut auf den zu erwartenden Theoriewert. Um die beiden Spektrallinien der Quecksilberlampe zu sehen, wäre nämlich eine Auflösung von $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{577\text{nm}}{2.1\text{nm}} = 274,76$.

4.2 Gitter

Die gemessenen Winkel für die Ordnungen der gelben Spektrallinie betragen:

$$\alpha_0 = (161.63 \pm 0.05)^\circ \qquad \alpha_1 = (157.93 \pm 0.05)^\circ \qquad \alpha_2 = (155.00 \pm 0.08)^\circ \qquad \alpha_3 = (151.27 \pm 0.5)^\circ$$

Daraus lassen sich die absoluten Winkel (inkl. Eichungfehler) berechnen:

$$\varphi_1 = (3.70 \pm 0.07)^\circ \qquad \varphi_2 = (7.13 \pm 0.09)^\circ \qquad \varphi_3 = (10.36 \pm 0.07)^\circ$$

Damit läßt sich jetzt mit Hilfe der beim Prisma ermittelden Spaltbreite die Auflösung des Gitters berechnen. Da φ bei höherer Ordnung größer ist erwartet man dort auch mehr Auflösung.

$$\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)_1 = 264.23 \pm 15.54 \qquad \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)_2 = 511.34 \pm 29.42 \qquad \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)_3 = 747.45 \pm 42.12$$

Hier sind die Fehler viel kleiner, da die Winkelmessung besser geklappt hat. Der Wert von $\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)_1$ liegt wieder sehr gut beim theoretischen Wert, der vorher berechnet wurde. Die anderen Werte liegen (dank höherer Ordnung) natürlich deutlich darüber.