SG - Stossgesetze
Blockpraktikum Frühjahr 2005

Alexander Seizinger, Tobias Müller
Assistent Christoph Back

Tübingen, den 14. April 2005

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Stösse

Man kann Stösse grob nach zwei Kategorien einteilen:

a) Elastische- / Unelastische Stösse

b) Zentrale / Nichtzentrale Stösse

In diese, Versuch geht es dabei um nichtzentrale, elastische Stösse. Daher gelten sowohl der Energie- als auch der Impulserhaltungssatz.

1.2 Energieerhaltungssatz

Bewegen sich zwei Kugeln der Massen m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$. Stossen diese elastisch ändern sich ihre Geschwindigkeiten und betragen nach dem Stoss $\vec{v}_1{}'$ bzw. $\vec{v}_2{}'$ wobei gilt:

$$E_{ges} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_1'^2 \tag{1}$$

1.3 Impulserhaltungssatz

Ebenso gilt für die Impulse p_1 und p_2 vor dem Stoss bzw. p_1' und p_2' nach dem Stoss:

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \tag{2}$$

1.4 Impulse im Schwerpunktsystem

Für den Schwerpunkt $\vec{S}$ gilt:

$$\vec{S} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

und damit für die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\vec{v}_{SP}$:

$$\vec{v}_{SP} = \frac{d}{dt}\vec{S} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Durch eine Galileitransformation erhält man für die Impulse im Schwerpunktsystem $p_{i,SP}$:

$$p_{i,SP} = m_i(\vec{v} - \vec{v}_{SP})$$

und damit insbesondere

$$p_{1,SP} = m_1\vec{v}_1 - m_1\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$p_{2,SP} = m_2\vec{v}_2 - m_2\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

also gilt

$$\vec{p}_{1,SP} = -\vec{p}_{2,SP}$$

Zeichnet man die Impulsvektoren nach dem Stoss in ein Koordinatensystem vom gleichen Ursprung aus ein, so bilden sie wegen der Gleichheit ihrer Beträge einen Kreis.

1.5 Abhängigkeit von Streuwinkel und Massenverhältnis

Sei φ der Winkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren (und damit der Flugrichtung) der beiden Kugeln, Kugel 2 befinde sich vor dem Stoss in Ruhe, dann gilt nach (1) und (2):

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

und

$$\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} = \frac{\vec{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2{}'2}{2m_2}$$

Setzt man die obere Gleichung in die Zweite ein ergibt sich:

$$\frac{2\vec{p}_1'\vec{p}_2' + \vec{p}_2'^2}{2m_1} = \frac{\vec{p}_2{}'2}{2m_2}$$

Über die Definition des Skalarprodukts über den von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkel lässt sich dies umschreiben:

$$\frac{2|\vec{p}_1'||\vec{p}_2'| \cdot \cos\varphi + \vec{p}_2'^2}{2m_1} = \frac{\vec{p}_2{}'2}{2m_2}$$

Division durch $\frac{\vec{p}_2'^2}{2m_2}$ und umstellen liefert:

$$\frac{m_2}{m_1} = 1 - 2\cos\varphi \cdot \frac{|\vec{p}_1'||\vec{p}_2'|m_2}{\vec{p}_2{}'2m_1}$$

bzw.

$$\frac{m_2}{m_1} = 1 - 2\cos\varphi \cdot \frac{v_1}{v_2}$$

2 Auswertung

2.1 Bestimmung des Massenverhältnis mit Hilfe der Kreisradien

Nach dem der Korrektur der Auftreffpunkte der gestoßenen Kugeln um den Betrag Kugelradius r_g + Kugelradius r_s, läßt sich mit Hilfe der Kreisradien R_g und R_s auf das Massenverhältnis der beiden Kugeln schließen, da

$$MV = \frac{m_s}{m_g} = \frac{R_g}{R_s}$$

Mit Hilfe der Gaussschen Fehlerfortplanzung lassen sich dann die geschätzen Fehler der Radien in den Fehler des Massenverhältnisse überführen:

$$\sigma_{MV} = \sqrt{\left(\frac{\partial MV}{\partial R_g}\sigma_{R_g}\right)^2 + \left(\frac{\partial MV}{\partial R_s}\sigma_{R_s}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R_s}\sigma_{R_g}\right)^2 + \left(\frac{R_g}{R_s^2}\sigma_{R_s}\right)^2}$$

Mit unseren Werten erhalten wir (die Fehler wurde geschätzt):

Stahl/Glas

$$r_s = 5\text{cm} \pm 8\text{mm (zuf.)}$$
$$r_g = 6,5\text{cm} \pm 4\text{mm (zuf.)}$$
$$MV = 1,3 \pm 0,22 \text{ (zuf.)}$$

Stahl/Stahl

$$r_s = 5,8\text{cm} \pm 5\text{mm (zuf.)}$$
$$r_g = 5,35\text{cm} \pm 5\text{mm (zuf.)}$$
$$MV = 0,92 \pm 0,12 \text{ (zuf.)}$$

2.2 Bestimmung des Massenverhältnisses mit Hilfe der Kugelradien

Bei den beiden Stahlkugeln läßt sich das Verhältnis der Massen (dank gleicher Dichte) auch sehr einfach über das Volumen, bzw. den Radius der Kugeln bestimmen. Es gilt:

$$MV = \frac{m_s}{m_g} = \left(\frac{r_s}{r_g}\right)^3$$

Für den Fehler gilt (nach Gauss)

$$\sigma_{MV} = \sqrt{\left(\frac{\partial MV}{\partial R_g}\sigma_{R_g}\right)^2 + \left(\frac{\partial MV}{\partial R_s}\sigma_{R_s}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3R_s^3}{R_g^4}\sigma_{R_g}\right)^2 + \left(\frac{R_s^2}{2R_s g3}\sigma_{R_s}\right)^2}$$

Für den Kugelradien haben wir (mit Hilfe der Schieblehre) $r_s = 0,615\text{cm}$ und $r_g = 0,64\text{cm}$ bestimmt und schätzen den zufälligen Fehler auf 1mm. Dann erhalten wir für das Massenverhältnis

$$MV = 0,89 \pm 0,42 \text{ (zuf.)}$$

2.3 Bestimmung des Massenverhältnisses mit Hilfe der Winkel und Strecken

Mit Hilfe der Strecken s_g und s_s welche die Kugeln während ihres Falls noch geflogen sind und dem Winkel α zwischen diesen beiden Strecken lässt sich ebenfalls auf das Masseverhältnis schließen:

$$MV = \frac{m_s}{m_g} = 1 - 2\frac{s_g}{s_s}\cos\alpha$$

Wir können nun zu jedem Stossparameter passendem Wertepaar ein Massenverhältnis ausrechnen und dann statistisch einen Mittelwert und einen Fehler (durch Standardabweichung des Mittelwertes) ermitteln. Einige der Werte lassen sich jedoch nicht praktisch weiterverwenden, da entweder negative Masseverhältnisse ermittelt werden (was unphysikalisch ist) oder die Werte nicht zuzuordnen sind da die Kugeln teilweise an der Messaparatur hängen geblieben und somit abgelenkt worden sind.

Stahl/Glas
Mit den Messwerten

Messwert	s_g [cm]	s_s [cm]	α	$MV = \frac{m_s}{m_g}$	Bemerkung
1					nicht ablesbar
2					nicht ablesbar
3					nicht ablesbar
4	12,0	4,9	63	-1,22	unphysikalisch
5	9,6	7,3	80	0,54	
6	8,3	8,5	83	0,76	
7	7,5	9,0	84	0,82	
8	12,8	4,1	62	-1,93	unphysikalisch
9	12,2	4,6	69	-0,90	unphysikalisch
10	11,4	5,3	74	-0,18	unphysikalisch
11	10,4	6,6	78	0,34	
12	9,3	7,2	79	0,51	
13	7,7	8,6	81	0,72	
14	6,0	9,3	84	0,87	
15	4,4	10,4	83	0,90	

erhalten wir

$$MV = 0,68 \pm 0,07 \text{ (zuf.)}$$

Stahl/Stahl
Mit den Messwerten

Messwert	s_g [cm]	s_s [cm]	α	$MV = \frac{m_s}{m_g}$	Bemerkung
1					nicht ablesbar
2	9,0	6,6	91	1,05	
3	8,2	7,8	91	1,04	
4	7,3	8,8	90	1,00	
5	6,9	9,2	89	0,97	
6	6,0	9,0	88	0,95	
7	4,8	10,4	85	0,92	
8	4,3	10,5	84	0,91	
9					nicht ablesbar
10	9,9	4,4	96	1,47	
11	9,2	5,1	94	1,25	
12	10,7	4,3	86	0,65	
13	8,7	7,0	93	1,13	
14	6,7	9,2	89	0,97	
15	5,4	8,8	89	0,98	

erhalten wir

$$MV = 1,02 \pm 0,05 \text{ (zuf.)}$$

3 Ergebnisse

Mit den verschiedenen Methoden zur Ermittlung der Massenverhältnisse erhalten wir bei der Stahl/Stahl Kombination lauter ähnliche Ergebnisse im Bereich von 1, was auch auf Grund der selben größe der Kugeln zu erwarten war. Nur bei der Glas/Stahlkombination erhalten wir 2 verschiedene Ergebnisse, wo wir aber keine Erklärung für finden können.

MV	Stahl/Glas	Stahl/Stahl
Strecken/Winkel	$0,68 \pm 0,07$	$1,02 \pm 0,05$
Kreisradien	$1,3 \pm 0,22$	$0,92 \pm 0,12$
Kugelradien	-	$0,89 \pm 0,42$