SA - Saitenschwingung
Blockpraktikum Frühjahr 2005

Filip Bár, Alexander Seizinger, Tobias Müller
Assistent Christoph Back

Tübingen, den 19. April 2005

1 Theoretische Grundlagen

Def.: *Schwingung (nach Wikipedia)*
Eine *Schwingung* (auch *Oszillation*) bezeichnet den Verlauf einer Zustandsänderung, bei der ein mechanisches oder nichtmechanisches System nach einer Störung/Auslenkung durch eine gegenläufige Wirkung wieder in den Ausgangszustand gebracht wird.

Def.: *Welle*
Eine *Welle* ist eine sich in einem (lokal) schwingungsfähigen Medium räumlich mit (konstanter[1]) Geschwindigkeit ausbreitende Störung des Gleichgewichtzustandes.

1.1 Die Herleitung der linearen homogenen n-dimensionalen Wellengleichung

Betrachten wir eine Zustandsgröße $u(\vec{x}, t)$ mit $t \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ eines isotropen Mediums M. Diese Zustandsgröße u erfahre eine Störung Φ, die sich in die Richtung eines Einheitsvektors $\hat{e} \in \mathbb{R}^n$ als ebene Welle mit der Geschwindigkeit $c = const$ ausbreitet. Es gilt:

$$u(\vec{x}, t) = \Phi\left(\vec{x} \cdot \hat{e} + ct\right)$$

Sei nun $\xi = \vec{x} \cdot \hat{e} + ct$ und $\vec{x} \cdot \hat{e} = \sum_i x_i \cdot e_i$ das euklidische Skalarprodukt. Φ sei mindestens zweimal nach ξ differenzierbar. Für die 2. Ableitung von u nach einer Koordinate x_i, $i \leq 1 \leq n$ von $\vec{x}$ gilt dann:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} e_i$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} e_i^2.$$

Für die 2. Ableitung von u nach der Zeit t erhalten wir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} c$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} c = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} c^2.$$

Bilden wir nun die Summe aller 2. Ableitungen von x_i:

$$\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} e_i^2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \cdot \sum_i e_i^2.$$

[1] hier betrachteter Spezialfall

Der Term $\sum_i e_i^2$ ist das Skalarprodukt des Einheitsvektors $\hat{e}$ mit sich selbst. Es gilt also $\sum_i e_i^2 = 1$ und damit

$$\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit c^2, so ist sie mit der 2. Ableitung von u nach t identisch. Wir erhalten die n-dimensionale homogene lineare Wellengleichung

$$c^2 \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Die Wellengleichung wurde anhand der allgemeinen ebenen Welle hergeleitet. Aus diesem Grund hat sie ihren höchsten Grad an Allgemeinheit noch nicht erreicht. Um sie koordinatensystemunabhängig formulieren zu können, bedienen wir uns des Laplaceschen Differentialoperators Δ.

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = 0.$$

1.2 Wellengleichung einer Saite

Auf eine Saite der Masse m und Länge l wirke eine Spannkraft $\vec{F}_S$. Wird ein Saitenstückchen der Länge Δl um eine kleine Strecke Δx ausgelenkt, so wird die Saite an den beiden Punkten die Winkel φ_1 und φ_2 gekrümmt. Als rücktreibende Kraft $F_{Rück}$ ergibt sich durch vektorielle Addition:

$$F_{Rück} = F_S \cdot (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)$$

Da wir nur kleine Winkel φ betrachten, gilt die Kleinwinkelnäherung $\sin\varphi = \tan\varphi$, und damit

$$F_{Rück} = F_S \cdot (\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

Mit $\tan\varphi = \frac{\partial y}{\partial x}$ erhalten wir

$$F_{Rück} = F_S \cdot (\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{l_0} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{l_0+\Delta l})$$

Für die Masse m_0 eines Saitenstücks der Länge Δl gilt

$$m_0 = \frac{m}{l} \cdot \Delta l$$

und damit mit $F = m \cdot a$:

$$\frac{m}{l}\ \Delta l \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_S \cdot (\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{l_0} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{l_0+\Delta l})$$

Lässt man in einem Grenzprozess Δl gegen 0 streben, so ergibt sich:

$$\frac{m}{l} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_S \cdot \frac{\partial y^2}{\partial x^2}$$

Ersetzt man $\frac{m}{l}$ durch die Liniendichte ρ_0 ergibt sich mit einem Koeffizientenvergleich mit der Wellengleichung folgender Zusammenhang zwischen Spannkraft F_S, der Massendichte der Saite ρ_0 und der Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle:

$$c = \sqrt{\frac{F_S}{\rho_0}}$$

2 Auswertung

2.1 Bestimmung der Massenbelegung μ

Zur Bestimmung der Massenbelegung μ wurden 3 Versuchsreihen mit konstanter Länge $l = 80\text{cm} \pm 4\text{mm}$ (Fehler beim Ablesen mit dem Maßband geschätzt) durchgeführt. Dabei wurde jeweils die Masse m variert und dann die Grundschwingung und die verschiedenen Oberschwingungen ermittelt. Dann wurden die Frequenzen in ein Diagramm eintragen und die Steigung der Ausgleichsgeraden (nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Maple) ermittelt um so einen genaueren Wert für die Grundschwingung f_1 zu ermitteln. Zur Ermittlung des Fehlers wurden 2 weitere (Ursprungs)Geraden nach Augenmaß eingezeichnet, so dass möglichst alle Messwerte zwischen ihnen liegen. Anschließend konnte dann die Ausbreitungsgeschwindigkeit und deren Fehler (nach Gauss) berechnet werden:

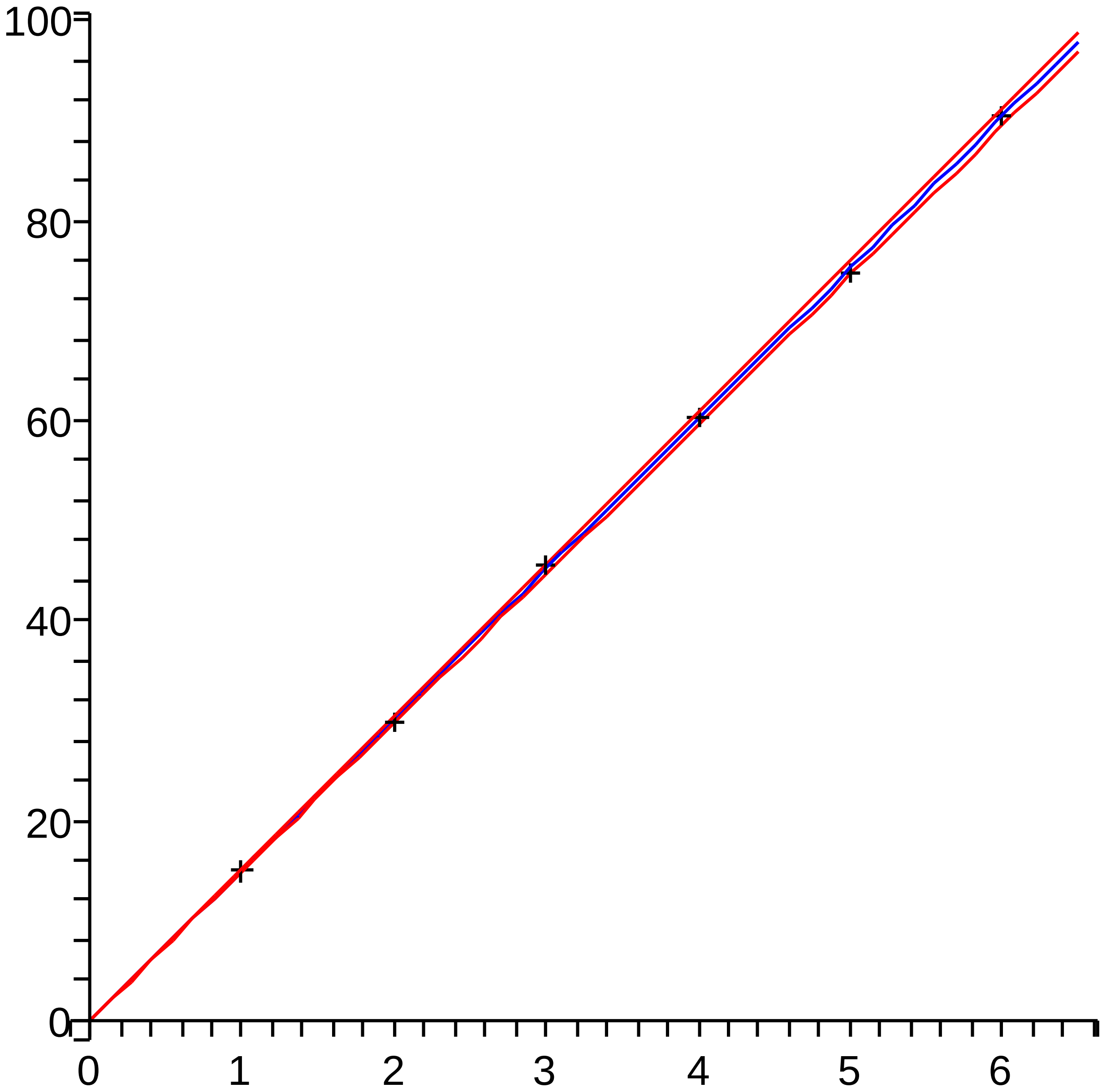
$$c_{laufendeWelle} = \lambda_{stehendeWelle} f_{laufendeWelle} = 2lf_1 \qquad \sigma_c = \sqrt{(2f_1\sigma_l)^2 + (2l\sigma_{f_1})^2}$$

Da die Gewichtskraft der Masse m die anspannenen Kraft F_{Spann} ist, läßt sich nun mit Hilfe der Ausbreitungsgeschwindigkeit c die Massenbelegung μ und deren Fehler (nach Gauss) bestimmen:

$$\mu = \frac{mg}{c^2} \qquad \sigma_\mu = \sqrt{\left(\frac{-mg}{2c^3}\sigma_c\right)^2}$$

2.1.1 Masse $m_1 = 100,2\mathrm{g}$

Frequenzen der Schwingungen



X-Achse: Anzahl der Bäuche n , Y-Achse: Frequenz f $[\mathrm{Hz}]$

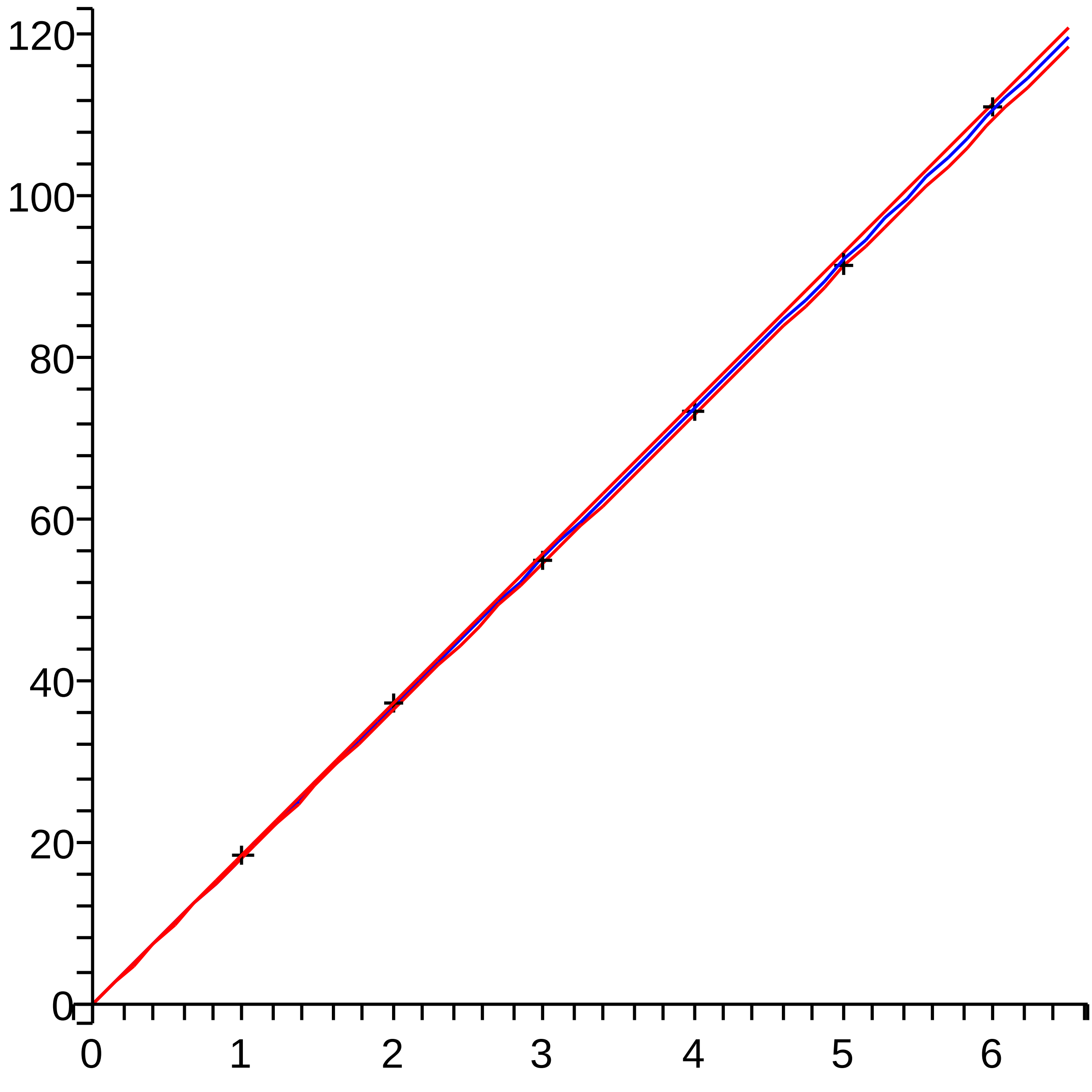
Wir erhalten

$$c_1 = 24,06\mathrm{m/s} \pm 0,27\mathrm{m/s}$$

$$\mu_1 = 1,70\mathrm{g/m} \pm 0,04\mathrm{g/m}$$

2.1.2 Masse $m_2 = 150,3\mathrm{g}$

Frequenzen der Schwingungen



X-Achse: Anzahl der Bäuche n , Y-Achse: Frequenz f $[\mathrm{Hz}]$

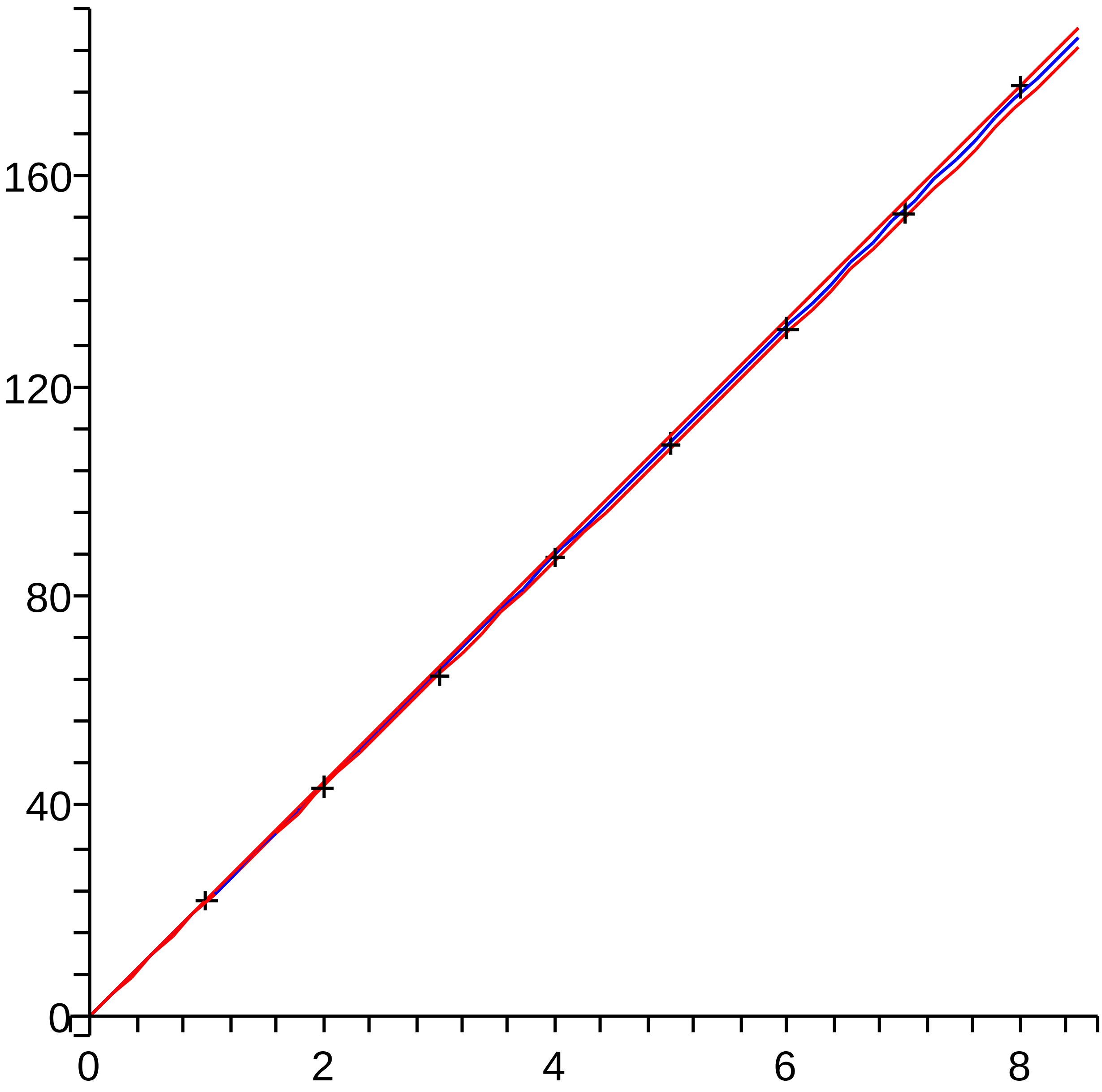
Wir erhalten

$$c_1 = 29,45\mathrm{m/s} \pm 0,33\mathrm{m/s}$$

$$\mu_1 = 1,70\mathrm{g/m} \pm 0,03\mathrm{g/m}$$

2.1.3 Masse $m_3 = 200,4\text{g}$

Frequenzen der Schwingungen



X-Achse: Anzahl der Bäuche n , Y-Achse: Frequenz f $[\text{Hz}]$

Wir erhalten

$$c_1 = 35,06\text{m/s} \pm 0,39\text{m/s}$$

$$\mu_1 = 1,60\text{g/m} \pm 0,02\text{g/m}$$

2.1.4 mittlere Massenbelegung

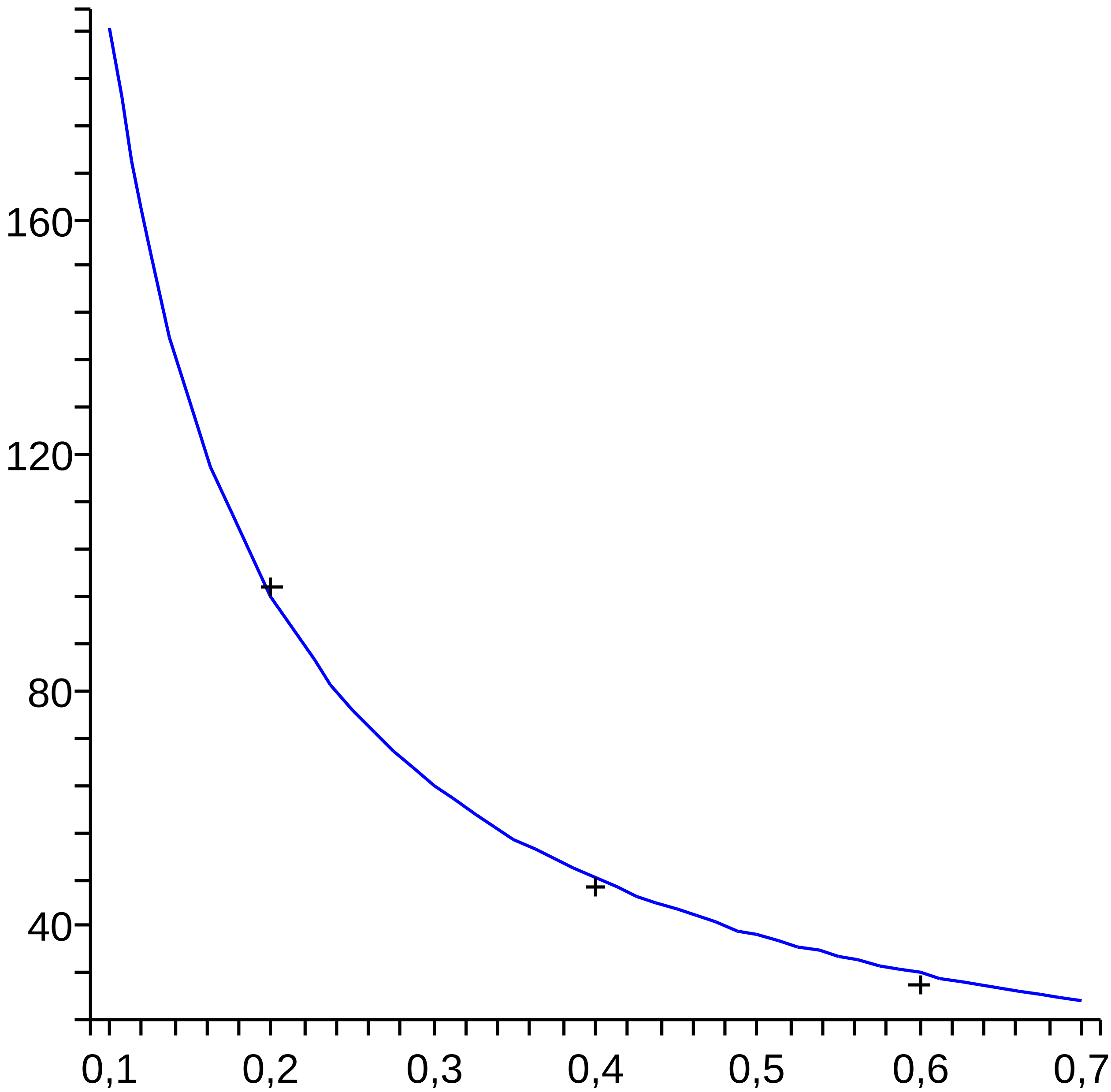
Wenn wir den Mittelwert der 3 Massenbelegungen berechnen, erhalten wir:

$$\bar{\mu} = 1,67\text{g/m}$$

2.2 Zusammenhang zwischen Grundfrequenz und Saitenlänge

Um den Zusammenhang zwischen Grundfrequenz und Saitenlänge zu untersuchen, wurde nun bei konstanter Masse $m = 200,4\mathrm{g}$ die Seillänge variiert und analog zum ersten Auswertungsteil mit Hilfe der Steigung ein Wert für die Grundschwingung und eine Fehlerabschätzung ermittelt. Für die gemessenenen Länge haben wir einen Fehler von $\sigma_l = 4\mathrm{mm}$ geschätzt.

Abhängigkeit der Grundfrequenz von der Saitenlänge



X-Achse: Saitenlänge l $[\mathrm{m}]$, Y-Achse: Frequenz f $[\mathrm{Hz}]$

Wie man dem Diagramm sehr schön entnehmen kann, ist hier eine Proportionalität $f \propto \frac{1}{l}$ zu erkennen, die wir mit der Ausgleichsfunktion

$$f(l) = \frac{19,23\mathrm{m}}{l\mathrm{s}}$$

beschreiben können. Um abzuschätzen wie groß der Fehler dabei ist ermitteln wird die größte Abweichung zwischen

Ausgleichsfunktion und Messwert und erhalten $\Delta l = 4\mathrm{cm}$, was sich um einen Faktor 10 vom geschätzten Fehler unterscheidet sowie $\Delta f = 2\mathrm{Hz}$ was in etwa dem Auflösungsvermögen des Frequenzgenerators entspricht, da dieser bei den Frequenz über $100\mathrm{Hz}$ ein Auflösungsvermögen von $1\mathrm{Hz}$ hat.

3 Ergebnisse

Im Versuch konnte sehr schön das Phänomen stehender Wellen untersucht werden. Trotz systematischer Fehler, wie der nicht festen Montage der Schnur am Lautsprecher und der Tatsache das die Schnur auch circulär geschwungen ist, konnte relativ genaue Werte für die Massbelegung ermittelt werden und auch die Antiproportionalität zwischen Saitenlänge und Grundfrequenz konnte bestätigt werden.