

PP - Physikalisches Pendel

Blockpraktikum Frühjahr 2005

Regina Schweizer, [Alexander Seizinger](#), [Tobias Müller](#)
Assistent Heiko Eitel

Tübingen, den 14. April 2005

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Mathematisches Pendel

Beim mathematischen Pendel gelten die folgenden Näherungen:

- konstante Fadenlänge l
- punktförmige Pendelmasse m
- masseloser Faden

Für die Rückstellkraft $F_{Rück}$ gilt:

$$F_{Rück} = -m g \cdot \sin \varphi \quad \text{wobei} \quad \sin \varphi = \frac{s}{l}$$

Zusätzlich wirke eine Dämpfungskraft F_D , die proportional zur Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$ ist, also

$$F_D = -2\lambda v = -2\lambda l \dot{\varphi}$$

Mit dem dritten Newtonschen Axiom erhalten wir folgende homogene DGL:

$$\ddot{s}(t) + 2\lambda \dot{s}(t) + \omega_0^2 \cdot s(t) = 0$$

wobei $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Als Lösung dieser Differentialgleichung erhält man:

$$s(t) = \hat{s} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega_D t + \delta) \quad (1)$$

wobei gilt: $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

1.2 Logarithmisches Dekrement

Das logarithmische Dekrement δ beschreibt die Stärke der Dämpfung. Man definiert:

$$\delta := \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}$$

wobei $A(t)$ die Amplitude zur Zeit t , T die Periodendauer der Schwingung ist.

Mit Gleichung (1) ergibt sich:

$$\delta = \ln \frac{\hat{s} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t + \delta)}{\hat{s} \cdot e^{-\lambda(t+T)} \cdot \cos(\omega(t+T) + \delta)}$$

Da T die Periodendauer ist lässt sich dies vereinfachen:

$$\delta = \ln \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda(t+T)}} = \ln e^{\lambda T} = \lambda T$$

1.3 Physikalisches Pendel

Beim physikalischen Pendel wird das Trägheitsmoment I_{ges} der Masse und ggf. der Aufhängung und die einzelnen Drehmomente D miteinbezogen. Aus Drehimpulserhaltungssatz ($\vec{L} = konst$) folgt

$$\dot{\vec{L}} = D_{ges} = 0 \quad (2)$$

Das rückstellende Drehmoment der Gravitationskraft $D_{Rück}$ beträgt

$$D_{Rück} = mgl \cdot \sin \varphi$$

das Drehmoment der Dämpfung D_D sei

$$D_D = \Gamma_{Ring} \cdot \dot{\varphi}$$

Mit Gleichung (2) folgt:

$$I_{ges}\ddot{\varphi} + \Gamma_{Ring} \cdot \dot{\varphi} + mgl \cdot \sin \varphi = 0 \quad (3)$$

Mit der für kleine Winkel α gültigen Näherung $\sin \alpha = \alpha$ erhält man:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\Gamma_{Ring}}{I_{ges}} \cdot \dot{\varphi} + \frac{mgl}{I_{ges}} \cdot \varphi = 0 \quad (4)$$

Diese homogene DGL wurde bereits für das mathematische Pendel gelöst.

2 Auswertung

2.1 kleine Winkelnäherung

Im ersten Versuchsteil sollte überprüft werden, ab welchen Winkeln die „Kleinwinkelnäherung“ nicht mehr mit der Realität übereinstimmt. Dazu vergleichen wir unsere gemessenen Kreisfrequenzen mit denen der Theorie des mathematischen Pendels ($\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$). Hierbei ist natürlich noch zu beachten, dass wir kein mathematisches Pendel hatten und eigentlich die Trägheitsmomente des Stabes und der Scheibe noch Einfluss haben und somit der Fehler natürlich etwas größer ausfällt. Die Messung wurde mit einer Länge von $l = 23,3\text{cm}$ und einer Masse von $m = 7,4\text{g}$ gemacht und wir somit einen Theoriewert von $\omega = 6,51/\text{s}$ erhalten.

Auslenkungswinkel α	ω_0 in s^{-1}	Fehler in %
10°	5,52	15,1
20°	5,53	14,9
45°	5,43	16,5
60°	5,34	17,9
100°	5,25	19,3

Leider fallen die Fehler hier sehr hoch aus, was vermutlich auf die Näherung mit dem mathematischen Pendel zurückzuführen ist. Man sieht aber das der Fehler bei 100° immerhin 5% größer ist.

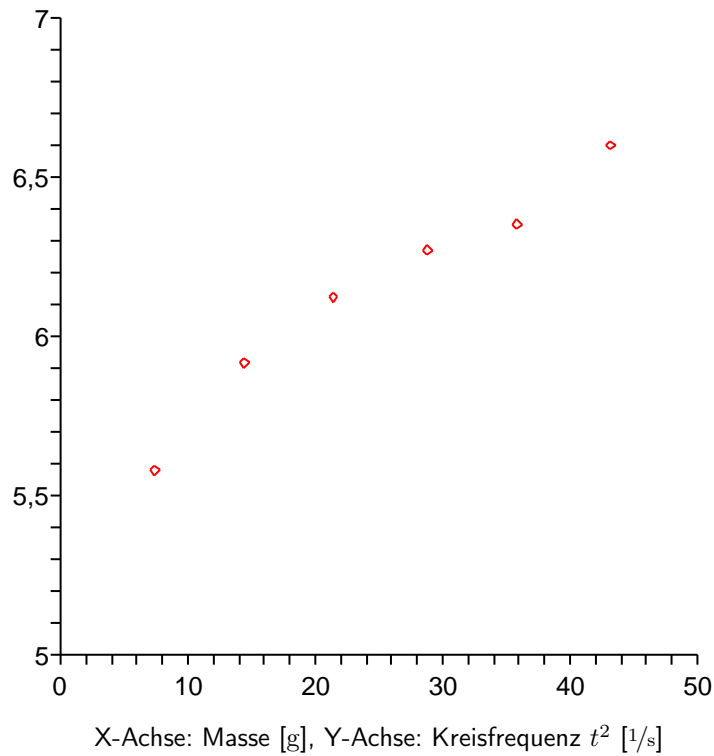
2.2 Abhängigkeit der Kreisfrequenz von Länge und Masse

2.2.1 Abhängigkeit der Kreisfrequenz von der Masse

Zur Bestimmung der Abhängigkeit der Kreisfrequenz von der Masse wurde bei konstanter Länge $l = 20,0\text{cm}$ mit verschiedenen Massen gemessen.

Masse m in g	7,4	14,4	21,4	28,4	35,8	43,2
Kreisfrequenz ω in $\frac{1}{\text{s}}$	5,58	5,92	6,12	6,27	6,35	6,60

Abhängigkeit der Kreisfrequenz von der Masse



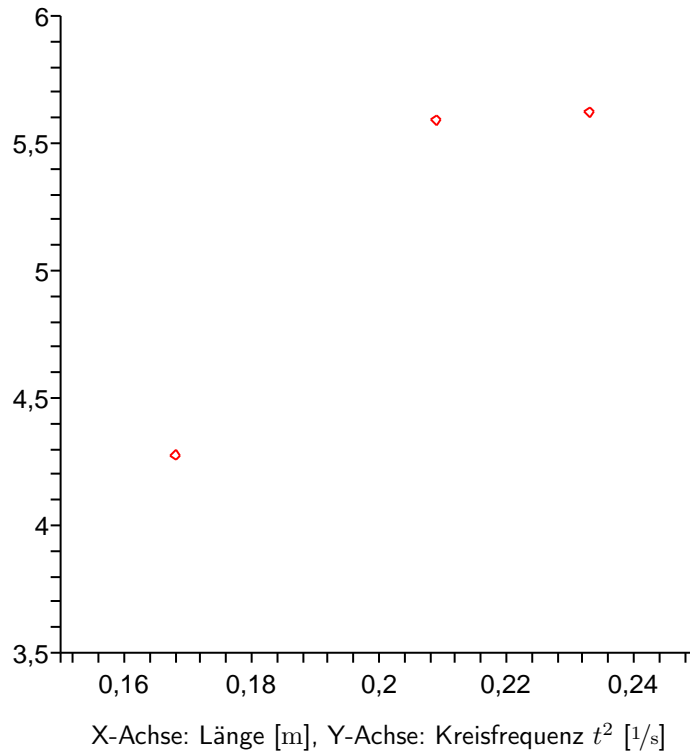
Vernachlässigt man den letzten Messpunkt sieht man sehr schön, dass sie sich die Messwerte dem Wert $\omega_m = \sqrt{\frac{g}{l}} \approx 7 \text{ 1/s}$ asymptotisch nähern, damit zunehmender Masse die Trägheit der Scheibe und des Stabes immer mehr vernachlässigbar werden und somit ein (fast) mathematisches Pendel vorhanden ist.

2.2.2 Abhängigkeit der Kreisfrequenz von der Länge

Anschließend wurde noch zur Bestimmung der Abhängigkeit der Kreisfrequenz von der Länge bei konstanter Masse $m = 7,4 \text{ g}$ mit verschiedenen Längen gemessen.

Länge l in cm	16,8	20,9	23,3
Kreisfrequenz ω in $\frac{1}{\text{s}}$	4,27	5,59	5,62

Abhängigkeit der Kreisfrequenz von der Länge



Man sieht hier sofort, dass es sich nicht um ein mathematisches Pendel handelt, da die Kreisfrequenz nicht von der Masse m und der Länge l unabhängig ist.

2.2.3 Erdbeschleunigung g

Mit Hilfe der Kreisfrequenz ω und der Länge l lässt sich mit der Beziehung $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ und den vorherigen Messwerten die Erdbeschleunigung berechnen. Bei konstanter Masse $m = 7,4g$ erhalten wir:

Masse m in g	7,4	14,4	21,4	28,4	35,8	43,2
Erdbeschleunigung g in $\frac{m}{s}$	6,22	7,00	7,50	7,86	8,07	8,71

Bei konstanter Länge $l = 20,0cm$ erhalten wir:

Länge l in cm	16,8	20,9	23,3
Erdbeschleunigung g in $\frac{m}{s}$	3,07	6,53	7,37

Auch hier liegen die Werte wieder etwas neben dem Theoriewert, was auf die Näherung des mathematisches Pendels bei der Berechnung zurückführen ist. Die besten Ergebnisse erhält man wenn man eine große Masse und einen langen Faden nimmt. Dann fallen nämlich die Trägheit der Scheibe und die des Stabes weniger ins Gewicht und die Näherung des mathematisches Pendels stimmt besser überein.

2.3 Dämpfung

Abstand d des Magneten in cm	0,5	1,0	1,5	∞
Kreisfrequenz ω in $\frac{1}{s}$	5,56	5,62	5,60	5,61
Logarithmisches Dekrement δ	1,17	0,38	0,21	0,12
Dämpfung λ in $\frac{1}{s}$	0,30	0,07	0,04	0,02

Man sieht bei den Messwerte sehr schön, das die Kreisfrequenz kaum von der Dämpfung abhängt und die Dämpfung zunimmt wenn man den Magneten näher an die Aluminiumscheibe schraubt.