MW - Maxwellrad
Blockpraktikum Frühjahr 2005

Alexander Seizinger, Tobias Müller
Assistent Heiko Eitel

Tübingen, den 1. November 2005

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Maxwellrad

Beim Maxwellrad (auch als Ÿojo¨der Physiker bezeichnet) handelt es sich um ein scheibenförmiges Schwungrad, das an zwei Fäden aufgehängt ist. Nach dem Loslassen wird es durch die Gravitationskraft nach unten beschleunigt und wickelt den Faden ab. Bei der Drehbewegung gewinnt es aufgrund seines Trägheitsmomentes I Rotationsenergie, die nach dem Erreichen des Umkehrpunktes wieder in potentielle Energie umgewandelt wird.

1.2 Trägheitsmoment

Rotieren Massenpunkte i der Masse m_i mit der Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}|$ um eine Achse $\vec{\omega}$ und sei r_i der Abstand eines Punktes von der Drehachse, so beträgt das gesamte Trägheitsmoment I_{ges}

$$I_{ges} = \sum_i m_i r_i^2$$

Für eine kontinuierliche Massenverteilung $\rho(\vec{r})$ gilt damit

$$I = \int_V \rho(\vec{r})\ r^2 dV$$

Für den Spezialfall einer Kreisscheibe konstanter Dichte ρ_0 mit Radius r und Höhe h ergibt sich:

$$I_{Scheibe} = \int_0^r \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho_0 r^3\ d\varphi dh dr = \frac{1}{2} M r^2$$

wobei $M = \pi r^2 h \cdot \rho_0$.

Analog bestimmt man das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders durch Variation der Integrationsgrenzen.

1.3 Energieerhaltung beim Maxwellrad

Ein Maxwellrad mit Radius r und Trägheitsmomnt I werde in der Höhe h über dem Nullniveau losgelassen. Die Gesamtenergie zum Zeitpunkt t setzt sich aus Rotationsenergie, kinetischer Energie und potentieller Energie zusammen, also:

$$E_{ges}(t) = mg \cdot x(t) + \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega(t)^2$$

mit $x(t)$ als Höhe zum Zeitpunkt t und $\omega(t) = \frac{\dot{x}(t)}{r}$. Im Umkehrpunkt zum Zeitpunkt t_0 gilt dann (mit $x(t_0) = h$:

$$E_{ges}(t_0) = m\ g\ h = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}(t_0)^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega(t_0)^2$$

Nach I auflösen:

$$I \cdot \left(\frac{\dot{x}(t)}{r}\right)^2 = 2 \cdot m\ g\ h - m \cdot \dot{x}(t_0)^2$$

$$I = m\ r^2 \cdot \left(\frac{2\ g\ h)}{\dot{x}(t_0)^2} - 1\right)$$

Mit $\dot{x}(t_0) = \frac{2h}{T}$ (wobei T die Falldauer bezeichnet) gilt dann:

$$I = m\ r^2 \cdot \left(\frac{g\ T^2}{2h} - 1\right) \tag{1}$$

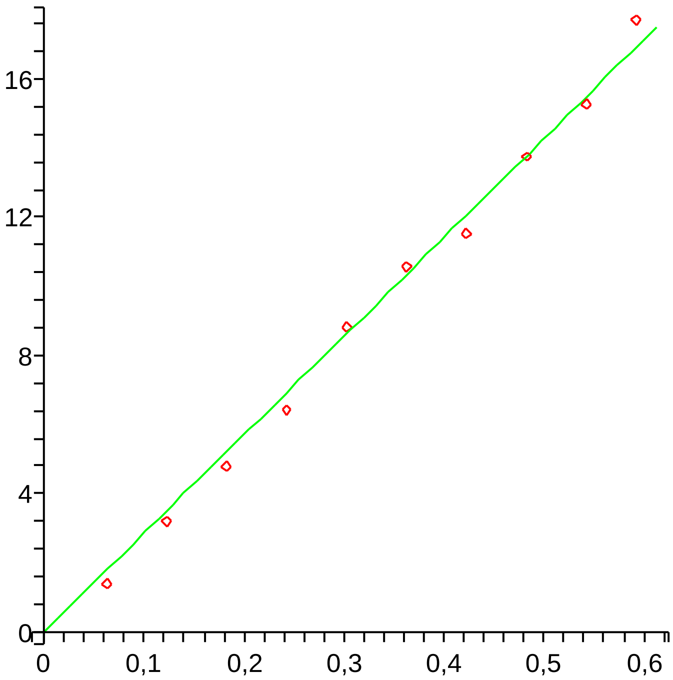
2 Versuchsdurchführung

Zuerst maßen wir mit einem Stoppuhr die Falldauer T je fünfmal pro Fallhöhe h, wobei wir die Fallhöhe in 6cm Schritten variierten. Anschließend bestimmten wir bei konstanter aber, um die Messfehler beim Stoppen der Zeit zu vermindern, ausreichend groß gewählter Fallhöhe 30-mal die Falldauer T, um das Trägheitsmoment I des Rads bestimmen zu können

3 Auswertung

3.1 $T^2(h)$-Diagramm

Abhängigkeit zwischen Fallhöhe h und Fallzeit t im Quadrat



X-Achse: Fallhoehe h [cm], Y-Achse: Fallzeit t^2 [s]

Im Diagramm sieht man sehr schön, das die durch eine Ursprungsgerade angefittet werden können und somit die Proportionalität zwischen der Fallhöhe h und dem Quadrat der Fallzeit t sofort ersichtlich scheint.

3.2 Trägheitsmoment

Zuerst muss noch der effektive Radius r ermitteln werden. Dazu wurde auf einer Strecke von $s = 62\text{cm}$ bei einer Windungszahl $n = 15$ gemessen und dann der Radius r berechnet:

$$r = \frac{43,25\text{cm}}{2 \cdot \pi \cdot 15} = 4,6\text{mm}$$

Nach (1) lässt sich das Trägheitsmoment I mit Hilfe der Masse $m = 1.5\text{kg}$, der Fallzeit $\bar{t} = 3,41\text{s}$, der Fallhöhe $h = 41,25\text{cm}$ und der Erdbeschleunigung $g = 9,81\text{m/s}^2$ berechnen:

$$I = mr^2\left(\frac{g\bar{t}^2}{2h} - 1\right) = 0,00433\text{Kgm}^2 = 43,3\text{Kgcm}^2$$

Der zufällige Fehler des Trägheitsmomentes läßt sich mit der Gausschen Fehlerfortplanzung berechnen. Dazu schätzen wir den zufälligen Fehler bei der Längenmessung auf $\sigma_h = 2\text{mm}$. Den zufälligen Fehler der Zeitmessung $\sigma_t = 0,082\text{s}$ erhalten wir durch die Standardabweichung des Mittelwertes. Damit gilt für den zufälligen Fehler des Trägheitsmomentes

$$\begin{aligned}\sigma_I &= \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial h}\sigma_h\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial t}\sigma_t\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-mr^2\frac{g\bar{t}^2}{2h^2}\sigma_h\right)^2 + \left(2mr^2\frac{g\bar{t}}{2h}\sigma_t\right)^2} \\ &= 0,00021\text{Kgm}^2 = 2,1\text{Kgcm}^2\end{aligned}$$

Der systematische Fehler der Zeitmessung war mit $0,01\%$ angegeben und ist somit bei uns $\Delta t_{sys} = 0,01\% \cdot \bar{t} = 0,34\text{ms}$. Der systematische Fehler der Längenmessung liegt bei $\Delta h_{sys} = h \cdot 5 \cdot 10^{-4} + 200\mu\text{m} = 0,2\text{mm}$. Mit Hilfe einer Taylorentwicklung erster Ordnung lässt sich nun der systematische Fehler des Trägheitsmomentes bestimmen:

$$\begin{aligned}
\Delta I_s ys &= \left|\frac{\partial I}{\partial h}\Delta h_{sys}\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial t}\Delta t_{sys}\right| \\
&= \left|-mr^2\frac{g\bar{t}^2}{2h^2}\Delta h_{sys}\right| + \left|2mr^2\frac{g\bar{t}}{2h}\Delta t_{sys}\right| \\
&= 0,000003\text{Kgm}^2 = 0,03\text{Kgcm}^2
\end{aligned}$$

Damit gilt für das Trägheitsmoment:

$$I = 44,3\text{Kgcm}^2 \pm 2,1\text{Kgcm}^2\text{(zuf.)} \pm 0,03\text{Kgcm}^2\text{(sys.)}$$