

LK - Lorentzkraft

Blockpraktikum Frühjahr 2005

Alexander Seizinger, Tobias Müller
Assistent René Rexer

Tübingen, den 1. November 2005

1 Einführung

In diesem Versuch geht es um die Kräfte, die ein \vec{B} -Feld auf bewegte Ladungen ausübt. Im ersten Teil wird dies anhand der Ablenkung eines Elektronenstrahls in einem Helmholtzspulenpaar untersucht, anschließend wird die Kraft eines \vec{B} -Feldes auf einen stromdurchflossenen Leiter gemessen.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Gesetz von Biot-Savart und Lorentzkraft

Experimentell können folgende Analogien zwischen \vec{E} -Feld und \vec{B} -Feld festgestellt werden:

- Das \vec{E} -Feld wird durch elektrische Ladungen Q , das \vec{B} -Feld durch Ströme I erzeugt.
- Sowohl der Betrag der elektrischen Feldstärke $|\vec{E}|$ als auch der Betrag der magnetischen Flussdichte $|\vec{B}|$ nehmen zum Abstand r proportional mit $\frac{1}{r^2}$ ab.

Man beobachtet, dass die \vec{B} -Feldlinien ein Wirbelfeld in der zur Leiterachse senkrechten Ebene bilden. Es kann also durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$d\vec{B} = k \cdot \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{Gesetz von Biot-Savart})$$

wobei k als Proportionalitätsfaktor den Wert $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ hat. Für die Coulomb-Kraft gilt $\vec{F}_C = \vec{E}q$; analog für das von dem Elementarstrom $I_1 d\vec{s}_1$ erzeugte \vec{B} -Feld:

$$d^2 \vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot I_1 d\vec{s}_1 \times (I_2 d\vec{s}_2 \times \hat{e}_r)$$

wobei \hat{e}_r der Einheitsvektor zwischen dem felderzeugenden Elementarstrom und dem betrachteten Punkt ist. Mit Biot-Savart erhält man:

$$\begin{aligned} d^2 \vec{F} &= I_1 d\vec{s}_1 \times d\vec{B} \\ \Rightarrow d\vec{F} &= I_1 d\vec{s}_1 \times \vec{B} \end{aligned}$$

Mit $I = \frac{dQ}{dt}$ folgt:

$$d\vec{F} = dQ \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Durch Integrieren erhält man:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{Lorentzkraft})$$

2.2 \vec{B} -Feld von Helmholtzspulen

Eine Helmholtzspulenpaar zeichnet sich dadurch aus, dass es 2 Spulen mit dem Radius R gibt die symmetrisch zu einer Symmetrieachse x mit dem Abstand $\frac{R}{2}$ angeordnet sind und deren Ausmaße (Breite und Dicke) sehr klein im Vergleich zu R sind. Wenn \vec{l} der Ortsvektor zwischen einem Stromelement $I d\vec{s}$ auf einer der Spulen und dem Mittelpunkt der Symmetrieachse ist, dann gilt wegen $I d\vec{s} \perp \vec{l}$ nach Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{s} \times \frac{\vec{l}}{l^3}$$

Wegen der Symmetrie der Helmholtzspulen haben sich alle senkrechten Anteil des B-Feldes weg und somit sind nur die parallel zur Symmetrieachse x interessant. Für dB_{\parallel} gilt:

$$dB_{\parallel} = dB \sin \alpha = dB \frac{R}{l} = \frac{\mu_0 I ds R}{4\pi l^3}$$

Um B zu bekommen, müssen wir nun noch über ds integrieren und erhalten:

$$B = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I ds R}{4\pi l^3} = \frac{\mu_0 I R^2}{2l^3} = \frac{\mu_0 I R^2}{2\sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}^3}$$

Da natürlich jede Windung der Helmholtzspule beiträgt und es ja insgesamt 2 Spulen gibt, gilt für das B-Feld am Mittelpunkt:

$$B = \frac{N\mu_0 I R^2}{\sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}^3}$$

2.3 Elektronenstrahl im \vec{B} -Feld

Der Elektronenstrahl wird an einer Glühkathode erzeugt. Die Elektronen werden fokussiert und von einer Anode beschleunigt. Die beim Durchlaufen der Spannung U ausgenommene Energie E entspricht $E = q_e \cdot U$. Da diese Energie als kinetische Energie für die Bewegung zur Verfügung steht ergibt sich somit für die (maximale) Geschwindigkeit der e^- :

$$\frac{1}{2} m_e v_e^2 = q_e U$$

bzw. durch Auflösen nach v_e :

$$v_e = \sqrt{\frac{2 q_e U}{m_e}} \tag{1}$$

Treten e^- mit dieser Geschwindigkeit in das \vec{B} -Feld ein, so wirkt auf diese die Lorentzkraft \vec{F}_L :

$$\vec{F}_L = q_e \cdot \vec{v}_e \times \vec{B}$$

Unter der Bedingung, dass die e^- senkrecht in das \vec{B} -Feld eintreten, wirkt die Lorentzkraft \vec{F}_L senkrecht zum \vec{B} -Feld und der Flugrichtung der Elektronen und zwingt diese auf eine Kreisbahn. Die Lorentzkraft muss die für eine Kreisbahn mit Radius r erforderliche Zentripetalkraft $F_Z = \frac{mv^2}{r}$ aufbringen. Durch Gleichsetzen der Beträge erhalten wir:

$$|\vec{F}_L| = q_e \cdot v_e B = \frac{m_e v_e^2}{r} \tag{2}$$

Mit Gleichung (1) und (2) ergibt sich damit:

$$\frac{e}{m} = \frac{2 U}{r^2 B^2}$$

2.4 Leiter im Magnetfeld

Durch einen (geraden) Leiter der Länge L_L und mit der Querschnittsfläche A_L fließe ein Strom I_L . \vec{n} sei ein auf die Länge 1 normierter Vektor, der in Richtung des Leiters zeigt. Dann beträgt die Stromdichte j betragsmässig $j = \frac{I_L}{A_L}$ und zeigt in Richtung des Leiters. Sei ρ_e die Elektronendichte, dann befinden sich im gesamten Leiterstück $N = \rho_e \cdot L_L A_L$ Elektronen, wobei sich jedes dieser Elektronen mit einer mittleren Geschwindigkeit v_e bewegt, wobei $\vec{v}_e \parallel \vec{n}$. Es gilt die Beziehung:

$$I_L = q_e \rho_e v_e A_L \tag{3}$$

Jedes dieser Elektronen erfährt wiederum eine gewisse Lorentzkraft \vec{F}_L . Addiert man diese ergibt sich für den gesamten Leiter:

$$\vec{F}_L = \rho_e L_L A_L q_e \cdot \vec{v}_e \times \vec{B}$$

bzw. mit Gleichung (3)

$$\vec{F}_L = I_L L_L \cdot \vec{n} \times \vec{B}$$

Sei $\vec{L} = L_L \cdot \vec{n}$ so vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$\vec{F}_L = I \cdot \vec{L} \times \vec{B}$$

3 Versuchsdurchführung

Zur Ermittlung von $\frac{e}{m}$ wurde, ein in einem Helmholtzspulenpaar stehender und schwach mit Edelgas gefüllter Glaskolben verwendet in dem ein Glückfaden einen Elektronenstrahl erzeugt. Durch Messung unterschiedlicher Radien bei verschiedener Stromstärke und Spannung kann auf den o.g. Quotienten zurückgeschlossen werden.

Im zweiten Experiment wurden eine Tauchspule in eine Spule mit Spalt eingeführt. Dabei wurden Abstand der Spulen und Stromstärke in Tauch und Spalt-Spule variiert und die Kraft, die auf den Leiter (Tauchspule), mit Hilfe einer Waage (Gewichtskraft) gemessen. Mit den ermittelten Messwerten, soll eine Überprüfung des Lorentzsches Gesetzes erfolgen.

4 Auswertung

4.1 Fadenstrahlrohr

U [V]	s [m]	I [A]	B [T]	e/m [C/kg]
350	0,04	4,210	$3,28 \cdot 10^{-3}$	$1,63 \cdot 10^{11}$
350	0,06	2,680	$2,09 \cdot 10^{-3}$	$1,79 \cdot 10^{11}$
350	0,10	1,605	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$1,79 \cdot 10^{11}$
300	0,04	3,925	$3,06 \cdot 10^{-3}$	$1,61 \cdot 10^{11}$
300	0,06	2,385	$1,86 \cdot 10^{-3}$	$1,93 \cdot 10^{11}$
300	0,10	1,470	$1,14 \cdot 10^{-3}$	$1,83 \cdot 10^{11}$
250	0,04	3,530	$2,75 \cdot 10^{-3}$	$1,65 \cdot 10^{11}$
250	0,06	2,075	$1,62 \cdot 10^{-3}$	$2,13 \cdot 10^{11}$
250	0,10	1,380	$1,07 \cdot 10^{-3}$	$1,73 \cdot 10^{11}$

Der ermittelte Wert von $\frac{e}{m} = 1,79 \cdot 10^{11} \text{C/kg} \pm 5,19 \cdot 10^9 \text{C/kg}$ (zuf.) stimmt nun doch recht gut mit dem Literaturwert von $\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{C/kg}$ überein. Der zufällige Fehler wurde mit Hilfe der Standardabweichung des Mittelwertes berechnet.

4.2 Stromwaage

4.2.1 Kraft in Abhängigkeit des Stromes in der Tauchspule

Das Diagramm ist als Anlage beigefügt. Der theoretische Wert der Steigung der Geraden, der sich mit Hilfe folgender Formel zu Ermittlung der Feldstärke B

$$B = \frac{\mu_0 I n}{l} \left(\frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2 + 4R^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4R^2}} \right)$$

berechnen läßt, liegt bei

$$m_T = \frac{F}{I_{\text{Tauch}}} = \frac{B I_{\text{Tauch}} N l_{\text{Tauch}}}{I_{\text{Tauch}}} = 6,357 \text{mT} \cdot 40 \cdot 5,3 \text{cm} = 0,0135 \text{N/A}$$

Die gemessene Steigung liegt bei $m_g = 0,0147 \text{N/A}$ und der größte Fehler bei 0,22mN.

4.2.2 Kraft in Abhängigkeit des B-Feldes

Das Diagramm ist als Anlage beigefügt. Der theoretische Wert der Steigung der Geraden liegt bei

$$m_T = \frac{F}{B} = \frac{B I_{\text{Tauch}} N l_{\text{Tauch}}}{B} = 0,6 \text{A} \cdot 40 \cdot 5,3 \text{cm} = 1,272 \text{N/T}$$

Die gemessene Steigung liegt bei $m_g = 1,187 \text{N/T}$ und der größte Fehler bei 0,49mN.

4.2.3 Bestätigung des Lorentzschen Gesetzes

Die Ergebnisse liegen relativ gut bei den zu erwartenden Theoriewerten und bestätigen damit das Lorentzsche Gesetz.

4.2.4 Auswirkung der Änderung des Spulenabstandes auf B-Feld

Das Diagramm ist als Anlage beigefügt.

5 Ergebnisse

Die Ergebnisse des ersten Versuchs liegen leider nicht ganz beim Literaturwert. Vermutlich ist die relativ große Ablesegenauigkeit und die begrenzte Fokussierung des Elektronenstrahls dafür verantwortlich. Im zweiten Versuch liegen die Ergebnisse relativ gut bei den zu erwartenden Theoriewerten, trotz Vernachlässigung der Reibung und der thermischen Erwärmung der Spule (Erhöhung des Widerstandes) und der Tatsache, das nicht im Vakuum gemessen wurde.