GP - Getriebenes Pendel
Blockpraktikum Frühjahr 2005

Regina Schweizer, Alexander Seizinger, Tobias Müller, Filip Bár, Manuel Proissl, Ruth Kowalski
Assistent Heiko Eitel

Tübingen, den 25. September 2005

1 Theoretische Grundlagen

1.1 DGL des getriebenen Pendels

Beim getriebenen Pendel wirkt eine zusätzliche äußere Antriebskraft F_A. Im allgemeinen Fall ist diese zeitabhängig, in diesem Versuch jedoch konstant. Sei k die Winkelbeschleunigung des Drehmoments der Kraft F_A, dann gilt (vgl. Versuchsprotokoll des physikalischen Pendels):

$$\ddot{\varphi} + 2\lambda\,\dot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \sin\varphi = k \tag{1}$$

Da beim Umschlagen große Winkel φ auftreten, ist die Kleinwinkelnäherung hier nicht möglich.

1.2 Lösung für konstantes φ

Ist φ konstant, so gilt $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$. Dann erhalten wir für (1) die stationäre Lösung:

$$\omega_0^2 \cdot \sin\varphi = k \Leftrightarrow \varphi = \arcsin\frac{k}{\omega_0^2} \tag{2}$$

Die Kraft F_A hält sich also mit $F_{Rück}$ das Gleichgewicht.

1.3 Lösung für großes λ und großes k

Wenn die Dämpfung sowie das Antriebsdrehmoment groß sind gegenüber $\ddot{\varphi}$ und ω_0^2, so gilt $\ddot{\varphi} \approx 0$ sowie $\sin\varphi \approx 0$. Wir erhalten für (1):

$$2\lambda\dot{\varphi} = k \qquad \text{(Trennung der Variablen)}$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{k}{2\lambda}t + \varphi_0$$

Der Winkel nimmt hier also linear mit der Zeit t zu.

1.4 Lösung für großes λ

Ist die Dämpfung sehr groß, so kann die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ vernachlässigt werden. Wir erhalten für (1):

$$\begin{aligned} & 2\lambda\,\dot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \sin\varphi && = k \\ \Leftrightarrow \quad & 2\lambda\varphi && = k - \omega_0^2 \sin\varphi \qquad \text{(Trennung der Variablen)} \\ \Leftrightarrow \quad & 2\lambda \textstyle\int \frac{d\varphi}{k-\omega_0^2 \sin\varphi} && = t \end{aligned}$$

Für die Lösung des Integrals müssen wir 3 Fälle unterscheiden (vgl. Bronstein: Integral Nr. 306, Nr. 294; Konstanten werdne Null gesetzt):

a) $k^2 > \omega_0^4$:

$$\begin{aligned} t &= \frac{4\lambda}{\sqrt{k^2-\omega_0^4}} \arctan \frac{k\tan\frac{\varphi}{2} - \omega_0^2}{\sqrt{k^2-\omega_0^4}} \\ \Leftrightarrow \quad \varphi(t) &= 2\arctan\left[\frac{1}{k}\left(\sqrt{k^2-\omega_0^4}\tan\left(\frac{\sqrt{k^2-\omega_0^4}}{4\lambda}t\right) + \omega_0^2\right)\right] \end{aligned}$$

b) $k^2 < \omega_0^4$:

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\lambda}{\sqrt{\omega_0^4 - k^2}} \ln \frac{k \tan\frac{\varphi}{2} - \omega_0^2 - \sqrt{\omega_0^4 - k^2}}{k \tan\frac{\varphi}{2} - \omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - k^2}} \\ \Leftrightarrow \quad \varphi(t) &= 2 \arctan\left[\frac{1}{k - k\, e^{\frac{\sqrt{\omega_0^4-k^2}}{2\lambda}t}} \left(e^{\frac{\sqrt{\omega_0^4-k^2}}{2\lambda}t} \left(\sqrt{\omega_0^4 - k^2} - \omega_0^2\right) + \omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - k^2}\right)\right] \end{aligned}$$

c) $k^2 = \omega_0^4$:

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\lambda}{k} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \varphi(t) &= 2 \arctan\left(\frac{k}{2\lambda} t\right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Alle Lösungen zeigen einen $\arctan$-Zusammenhang zwischen Winkel und Zeit, wobei im Fall b) der Winkel in der längsten Zeitspanne sein Maximum erreicht. In Fall a) und c) erfolgt dies in ungefähr gleicher Zeitspanne.

1.5 Teillösung für kleines λ

Ist die Reibung vernachlässigbar klein, so kann in (1) der $\dot{\varphi}$-Term vernachlässigt werden. Wir erhalten einen Spezialfall einer inhomogenen *Sinus-Gordon-Gleichung*:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = k$$

Mit $\dot{\varphi} = \omega$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} + \omega_0^2 \sin\varphi \tfrac{\omega}{\omega} &= k \\ \Leftrightarrow \quad \omega\, \dot{\omega} + \omega_0^2 \sin\varphi\omega &= k\omega \qquad \text{(Trennung der Variablen und Intergation (Konstanten werden Null gesetzt))} \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\omega^2 - \omega_0^2 \cos\varphi &= k\varphi \\ \Leftrightarrow \quad \omega &= \sqrt{2\left(k\varphi - \omega_0^2 \cos\varphi\right)} \end{aligned}$$

und damit den Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit ω und Winkel φ des Pendels. Um $\varphi(t)$ zu erhalten, muss das Integral

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\left(k\varphi - \omega_0^2 \cos\varphi\right)}}$$

gelöst werden.

1.6 Umschlagpunkt

Damit das Pendel überschlägt muss die antreibende Kraft größer als die rücktreibende Kraft $F_{Rück}$ sein. Bei einer Auslenkung um $\varphi = 90°$ ist $F_{Rück} = F_G$ maximal, somit wird das Pendel für jede antreibende Kraft $F_A > F_G$ umschlagen. Wir sehen dies auch an der Gleichung (2), denn der Definitionsbereich für $\arcsin$ ist $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Außerhalb dieses Bereichs ist φ somit nicht mehr konstant.

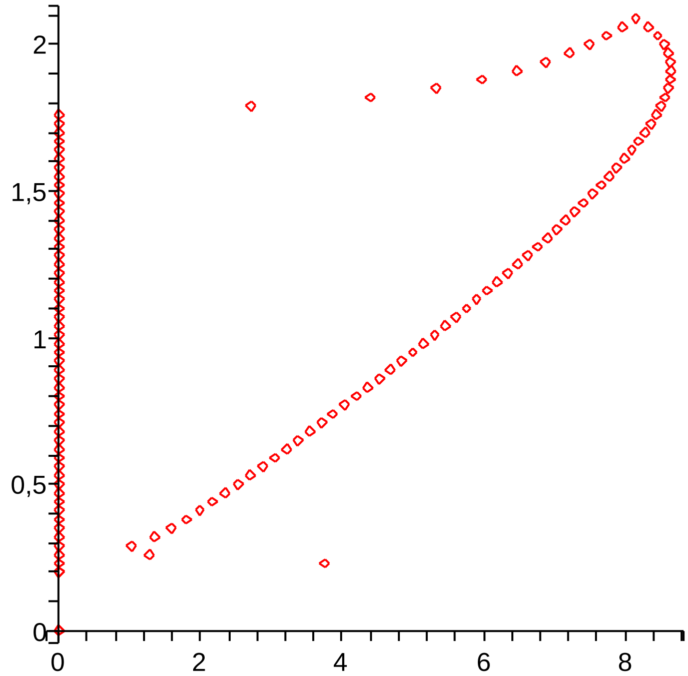
2 Auswertung

2.1 „rotierendes Pendel“

Im ersten Versuchteils wurde die Spannung ($\propto$ Kraft) immer erhöht und gleichzeitig die mittelere Kreisfrequenz des Pendels bestimmt. Von besonderem Interesse waren die Spannung $U_{dc,c}$ und der Winkel φ_c bei der das Pendel überschlägt und die Spannung $U_{dc,r}$ bei dem das Pendel beim Absenken der Spannung nicht mehr überschlägt. Die Messungen wurden jeweils 3 mal durchgeführt: Einmal ohne Dämpfung (bzw. nur die des Systems) und zweimal mit verschiedener Dämpfung durch den Magneten.

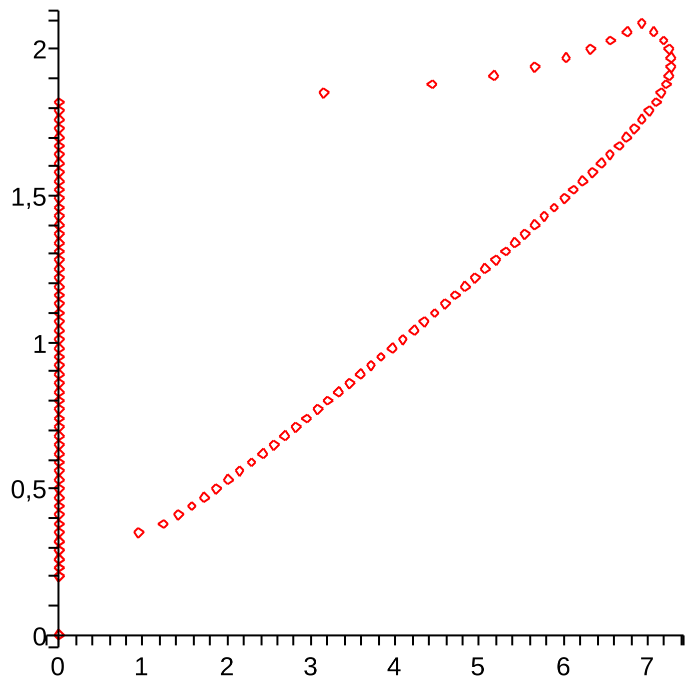
	ohne Dämpfung	mit kleiner Dämpfung	mit großer Dämpfung
$U_{dc,c}$ [V]	1,79	1,85	1,82
φ_c	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\langle\dot{\varphi}\rangle$ [1/s]	2,71	3,15	1,53
$U_{dc,r}$ [V]	0,23	0,23	1,16

Abhängigkeit der Kreisfrequenz von der Spannung U ohne Dämpfung



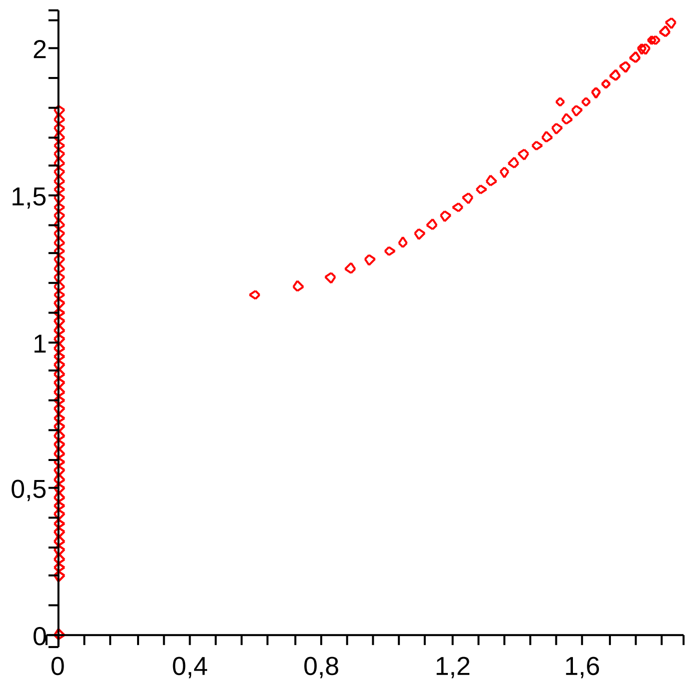
X-Achse: Spannung U [V], Y-Achse: Kreisfrequenz ω [$^1/_\mathrm{s}$]

Abhängigkeit der Kreisfrequenz von der Spannung U mit kleiner Dämpfung



X-Achse: Spannung U [V], Y-Achse: Kreisfrequenz ω [$^1/_\mathrm{s}$]

Abhängigkeit der Kreisfrequenz von der Spannung U mit großer Dämpfung



X-Achse: Spannung U [V], Y-Achse: Kreisfrequenz ω [$1/\mathrm{s}$]

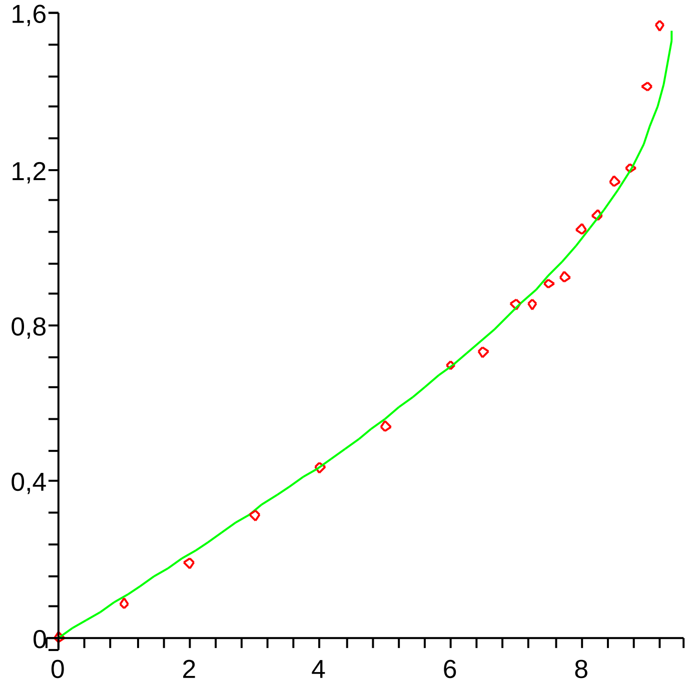
2.2 „stehendes Pendel“

In diesem Versuchsteil wurden die Spannung ($\propto$ Kraft) gemessen bei denen das Pendel noch steht und noch nicht überschlägt. Die Messpunkte lassen sich durch die Ausgleichsfunktion

$$\varphi(U) = \arcsin\left(\frac{U}{9,37725\mathrm{V}}\right)$$

anfitten.

Abhängigkeit des Winkels φ von der Spannung U



X-Achse: Spannung U [V], Y-Achse: Winkel φ