FA - Analyse von Messunsicherheiten

Blockpraktikum Frühjahr 2005

Alexander Seizinger, Tobias Müller

Tübingen, den 21. März 2005

Theoretische Grundlagen

Einführung

In diesem Versuch verwenden wir ein Pendel, um die Erdbeschleunigung g zu bestimmen. Hierzu wird bei bekannter Seillänge l die Periodendauer T gemessen, woraus anschließend g berechnet werden kann. Als Näherung verwenden wir das mathematische Pendel, bei dem an einem masselosen, nicht dehnbaren Faden eine Punktmasse schwingt.

Ziel dieses Versuches ist es, den richtigen Umgang mit zwangsläufig auftretenden Messfehlern (heutzutage nach DIN Messunsicherheiten) zu erlernen. Hierbei wird zwischen zwei Arten von Messfehlern unterschieden:

a) **Systematische Fehler**: Ein Fehleranteil, der bei Wiederholung einer Messung unter identischen Bedingungen einen konstanten Wert annimmt.

b) **Zufälliger Fehler**: Ein Fehleranteil, dessen Schwankungen als Folge von Zufallswerten betrachtet werden kann.

Bei diesem Versuch wären systematische Fehler also die Ungenauigkeit der Längenmessung (Zollstock) $\Delta l_{sys} = 200\mu\text{m} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot l$ und die der Zeitmessung (Quarzgenauigkeit) $\frac{\Delta T_{sys}}{T_{sys}} = 0.01\%$. Die zufälligen Fehler sind die statistischen Abweichungen vom Mittelwert $\overline{T}$.

Zusätzlich ist zu beachten, dass sich sowohl zufällige als auch systematische Fehler fortpflanzen. Zufällige Fehler folgen dabei dem **Gaussschen Fehlerfortpflanzungsgesetz**. Bei diesem Versuch gilt also:

$$|\Delta g_{zuf}| = \sqrt{\left(\frac{\delta g}{\delta T}\Delta T_{zuf}\right)^2 + \left(\frac{\delta g}{\delta l}\Delta l_{zuf}\right)^2} \tag{1}$$

Die Fortplanzung der systematischen Fehler lässt sich durch eine Taylorentwicklung erster Ordnung betragsmäßig wie folgt abschätzen:

$$|\Delta g_{sys}| = \left|\frac{\delta g}{\delta T}\Delta T_{sys}\right| + \left|\frac{\delta g}{\delta l}\Delta l_{sys}\right| \tag{2}$$

Die gesuchte Periodendauer $\overline{T}$ ergibt dem arithmetischen Mittel der Messwerte, also gilt für n Messwerte:

$$\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$$

Die Standardabweichung, die Auskunft über die Größe des zufälligen Fehlers der einzelnen Messwerte gibt, ist:

$$s_T = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{T} - T_i)^2}$$

Die Unsicherheit des Mittelwertes kann mit Hilfe der Standardabweichung des Mittelwertes $s_{\overline{T}}$ abgeschätzt werden, wobei gilt:

$$s_{\overline{T}} = \frac{s_T}{\sqrt{n}}$$

Bei einer hinreichend großen Anzahl von Messwerten ergibt sich eine Gausssche Normalverteilung.

Mathematisches Pendel

Wie bereits oben erwähnt werden beim mathematischen Pendel die Näherungen der konstanten Fadenlänge, des masslosen Fadens und der punktförmigen Pendelmasse gemacht. Da wir nur nur um kleine Winkle φ auslenken, gilt:

$$F_{Rück} = m\ g \cdot \sin\varphi$$

und

$$\sin\varphi = \frac{s}{l}$$

Mit dem dritten Newtonschen Axoim erhalten wir:

$$\ddot{s}(t) = -\frac{g}{l} \cdot s(t)$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung erhält man:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos\omega t \qquad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{3}$$

Ausserdem gilt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{4}$$

Aus Gleichung (3) und (4) ergibt sich:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{\overline{T}^2} \tag{5}$$

Versuchsdurchführung

In einem Vorversuch wurden 10 Messungen (vgl. handschriftliches Messprotokoll) durchgeführt, um einen Anhaltspunkt für die zu erwartenden Werte von $\overline{T}$ und s_t zu bekommen. Anschließend wurde die optimale Anzahl von Meßintervallen r mit Hilfe von $r \approx \sqrt{n}$ berechnet und sicherheitshalber noch 3 Intervalle auf jeder Seite hinzugefügt und anschließend die Intervall Breite $\Delta T_{int} = 6\frac{s_t}{r}$ bestimmt. Nun konnten die 200 Meßwerte für die „richtige" Versuchsreihe aufgenommen werden.

Auswertung

Handschriftliches Protokoll als Anlage beigefügt.

Histogramme

Sind als Anlage beigefügt.

Mittelwerte, Standardabweichung

Intervall [s]	1-10	11-35	36-85	86-185	186-200	Summe	Summenhäufigkeit
2,667	0	1	0	1	0	2	1,00%
2,691	1	1	1	1	1	5	3,50%
2,715	0	1	3	4	1	9	8,00%
2,739	0	1	3	9	2	15	15,50%
2,763	1	2	4	14	2	23	27,00%
2,787	3	3	11	19	2	38	46,00%
2,811	2	6	15	16	2	41	66,50%
2,835	2	6	5	16	2	31	82,00%
2,859	1	2	4	11	2	20	92,00%
2,883	0	0	2	4	0	6	95,00%
2,907	0	2	2	5	1	10	100,00%
Messwerte	10	25	50	100	15	200	
Mittelwert [s]	2,7966	2,80428	2,80236	2,80356	2,7934	2,80224	
Standardabweichung der Messwerte [s]	2,20E-03	3,38E-03	2,25E-03	2,60E-03	3,58E-03	2,62E-03	
Standardabweichung des Mittelwertes [s]	6,96E-04	6,77E-04	3,18E-04	2,60E-04	9,23E-04	1,85E-04	

Berechnung der Erdbeschleunigung

Nach (5) gilt:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{\overline{T}^2} = 4\pi^2 \frac{1,97\text{m}}{(2,8\text{s})^2} = 9,92\text{m}/\text{s}^2$$

Für den zufälligen Fehler ergibt sich nach (1):

$$\begin{aligned}
|\Delta g_{zuf}| &= \sqrt{\left(\frac{8\pi^2 l}{\overline{T}^3}\Delta T_{zuf}\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{\overline{T}^2}\Delta l_{zuf}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{8\pi^2 \cdot 1,97\text{m}}{(2,8\text{s})^3} 1,85 \cdot 10^{-4}\text{s}\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{(2,8\text{s})^2} 3\text{mm}\right)^2} \\
&= 0,015\text{m}/\text{s}^2
\end{aligned}$$

Für den systemasiche Fehler gillt nach (2):

$$\begin{aligned}
|\Delta g_{sys}| &= \left|\frac{8\pi^2 l}{\overline{T}^3}\Delta T_{sys}\right| + \left|\frac{4\pi^2}{\overline{T}^2}\Delta l_{sys}\right| \\
&= \left|\frac{8\pi^2 \cdot 1,97\text{m}}{(2,8\text{s})^3} 0,2811\text{ms}\right| + \left|\frac{4\pi^2}{(2,8\text{s})^2} 1,385\text{mm}\right| \\
&= 8.97\text{mm}/\text{s}^2
\end{aligned}$$

Die Erdbeschleunigung beträgt also $g = 9,92\text{m}/\text{s}^2 \pm 0,015\text{m}/\text{s}^2$ (zuf.) $\pm 8.97\text{mm}/\text{s}^2$ (syst.) .

Warscheinlichkeitsnetz

Aus der befügten Anlage läßt sich ein Mittelwert $\overline{T} = 2,795\text{s}$ und eine Standardabweichung von $s_T = 0,055\text{s}$ ablesen.

Ergebnisse

Man sieht sehr schön, dass bei großer Messanzahl n die Verteilung der Messwerte im Histogramm sich einer Gaussverteilung annähren. Leider entspricht der gemessene Wert der Erdbeschleunigung von $g = 9,92\text{m}/\text{s}^2 \pm 0,015\text{m}/\text{s}^2$ (zuf.) $\pm 8.97\text{mm}/\text{s}^2$ (syst.) nicht ganz dem Literaturwert von $g = 9,81\text{m}/\text{s}^2$. Vermutlich haben die Vernachlässigung des Luftwiderstandes, die Annahmen des mathematischen Pendels und die ungenaue Messung der Pendellänge mit zu diesem Ergebnis geführt. Auch im Warscheinlichkeitsnetz sieht man schön, das die Verteilung wenigstens annährend (bis auf einem Ausreiser) einer Gaussverteilung entspricht.